

Zur Problematik des Energiebegriffs in der Relativitätstheorie sowie in verwandten Theorien

Thomas Stör*

17. November 2009

Zusammenfassung

Ausgehend vom klassischen Energiebegriff sowie dem Formalismus der Eichtheorien wird die Problematik des Energiebegriffs in der Allgemeinen Relativitätstheorie zusammengefasst. Es werden lokale tensorielle, pseudo-tensorielle sowie nicht-lokale Definitionen erörtert. Anschließend wird die Einstein-Cartan-Theorie als Erweiterung der Einstein-Hilbert-Theorie sowie die hier auftretende Anomalie der lokalen Erhaltung der Energie-Impuls-Dichte aufgrund der nicht-verschwindenden Torsion diskutiert. Abschließend wird der Formalismus der Schleifenquantengravitation vorgestellt sowie die Problematik des Energiebegriffs und verwandter Probleme in dieser Theorie präsentiert.

1 Einführung

1.1 Zum klassischen Energiebegriff

Die Energie eines physikalischen Systems ist in der klassischen Mechanik (zunächst nicht allgemeingültig) definiert als Fähigkeit dieses Systems, mechanische Arbeit zu verrichten. Darunter fallen insbs. die kinetische = Bewegungsenergie, die potentielle = Lageenergie sowie die innere bzw. Wärmeenergie (zu letzterer siehe den Abschnitt zur Entropie). In der klassischen Mechanik wird die Energie dabei von (meist idealisiert punktförmigen) Massenkörpern getragen. Durch die Einführung des Feldbegriffs insbs. in der Elektrodynamik sowie der Allgemeinen Relativitätstheorie ist der Energiebegriff geeignet auf die Feldenergie zu erweitern; in diesem Fall verrichtet das Feld mechanische Arbeit, wandelt also z.B. Feldenergie in kinetische Energie (eines beschleunigten Körpers) um. Außerdem kann das Feld – auch bei Abwesenheit von anderen Körpern – selbst Energie beinhalten. Dabei sind im Gegensatz zu den im Feld bewegten Körpern die o.g. Begriffe kinetische und potentielle Energie für ein Feld nicht mehr zu trennen.

Im Rahmen der klassischen Mechanik sowie der Elektrodynamik ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Diese folgt aus der Anwendung des Noether-Theorems bzgl. (globaler oder lokaler) Symmetrien eines Systems, im Falle der Energie bzw. des Impulses speziell der Invarianz unter Zeit- bzw. Raum-Translationen. Betrachtet z.B. man ein System aus mehreren Körpern $n = 1, 2, \dots$ der Massen $m_1, m_2, \dots$ die untereinander gravitativ wechselwirken, so ist die Summe der kinetischen Energien

$$T_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad (1.1)$$

aller Körper plus die Summe der (gemäß dem Newtonschen Gesetz) paarweise zwischen den Körpern herrschenden Anziehungskräften

$$U_{mn} = G \frac{m_m m_n}{|r_m - r_n|} \quad (1.2)$$

eine Erhaltungsgröße:

*e-mail: tom.stoer@gmx.net

$$E = \sum_n T_n + \sum_{m>n} U_{mn} \quad (1.3)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

Die Herleitung dieser Erhaltungsgröße erfolgt dabei üblicherweise aus der sogenannte Lagrangefunktion des Systems. Anhand dieses mathematischen Objektes lassen sich Symmetrien und Erhaltungssätze diskutieren sowie die Bewegungsgleichungen ableiten. Man kann die Gültigkeit dieser Gleichung mit teilw. erheblichem Aufwand direkt anhand der Lösungen $r = r(t)$ prüfen, indem man diese in die Gleichung für $dE/dt = 0$ einsetzt. Grundsätzlich ist die Ableitung einer Erhaltungsgröße aus dem Noether-Theorem jedoch allgemeiner als “nur” die Verifikation über die Bewegungsgleichungen, denn man kann derartige Symmetrien häufig diskutieren, ohne überhaupt die Bewegungsgleichungen lösen zu müssen.

In der Newtonschen Theorie wird dem Gravitationsfeld selbst keine Energie zugeschrieben – die Energie wird ausschließlich von massiven Körpern getragen. Diese Sichtweise kann in der ART nicht mehr aufrechterhalten werden, da hier explizit die Umwandlung von kinetischer in Feldenergie stattfindet, nämlich bei der Abstrahlung von Gravitationswellen. Dieser Effekt ist natürlich bereits aus der klassischen Elektrodynamik bekannt, z.B. bei der Umwandlung der kinetischen Energie von Elektronen in elektromagnetische Strahlung, wie er z.B. in einem Sender stattfindet (sowie der umgekehrten Umwandlung in einer Antenne). In der klassischen Elektrodynamik folgt dabei die Energiedichte aus der Summe der elektrischen und magnetischen Feldenergiedichten

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (1.5)$$

In Abwesenheit von weiteren Ladungen ist die gemäß

$$E = \int dV \epsilon \quad (1.6)$$

definierte Energie erhalten, d.h. wiederum $dE/dt = 0$.

In der ART betrachtet man zwar ebenfalls noch die Bewegung von Punktmassen (entlang von Geodäten) in einem äußeren Gravitationsfeld, allerdings ist diese Betrachtung streng genommen nur für verschwindende Massen der Testkörper gültig, d.h. die Testkörper sollen keinerlei Rückwirkungen auf das Gravitationsfeld haben und selbst keine Energie tragen. Streng genommen – und in den Einsteingleichungen auch so umgesetzt – betrachtet man sowohl das Gravitationsfeld selbst, als auch Materie und Strahlung als Feld, letzteres über den sogenannten Energie-Impuls-Tensor, der die Energiedichte, die Impulsdichte sowie den Druck der Materiefelder enthält. Demnach wird die gesamte Energiedichte der Materie als Dichte der Feldenergie repräsentiert. Im Folgenden muss dabei strikt zwischen der Energiedichte und der Energie, d.h. der Energiedichte integriert über ein bestimmtes Volumen der Raumzeit unterschieden werden! Der Feldbegriff operiert ausschließlich mit Dichten, die Anwendung der Integration ist nicht trivial und teilweise nicht eindeutig möglich! Wir werden aber auch sehen, dass es in der ART keine Entsprechung der o.g. einfachen Formel für die Feldenergiedichte und somit auch nicht für die Gesamtenergie des Gravitationsfeldes gibt.

1.2 Ladungserhaltung in Eichtheorien

Betrachten wir zunächst die klassische Elektrodynamik. Aus dem Viererpotential A lässt sich der Feldstärke-tensor F gemäß

$$F = dA \quad (1.7)$$

ableiten. Dabei steht $d. = d\wedge.$ für die äußere Ableitung. F erfüllt trivialerweise die homogene Maxwellgleichung

$$dF = 0 \quad (1.8)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von F mit

$$dF = d^2 A \quad (1.9)$$

sowie der Definition und Antisymmetrie der äußeren Ableitung

$$d^2 = d \wedge d = 0 \quad (1.10)$$

Die inhomogene Maxwellgleichung lautet

$$d \star F = j \quad (1.11)$$

Dabei ist $\star F$ der zu F duale Feldstärketensor und j die lokale elektrische Viererstromdichte. Wiederum folgt bei einer zweiten Anwendung von d , mit der Antisymmetrie der äußeren Ableitung

$$dj = d^2 \star F = 0 \quad (1.12)$$

D.h. j muss zwingend den lokalen Erhaltungssatz bzw. die Kontinuitätsgleichung $dj = 0$ erfüllen, andernfalls wäre die Theorie inkonsistent. Die Interpretation der Kontinuitätsgleichung besagt dabei, dass die zeitliche Änderung einer Ladungsdichte (bzw. der Ladung in einem bestimmten Volumen) immer mit einer entsprechenden räumlichen Änderung der Stromdichte (bzw. der Ladung, die durch die Oberfläche des Volumens strömt) verbunden ist.

Neben dieser Konsistenzbedingung werden lokal erhaltene Ströme in Feldtheorien üblicherweise aus dem berühmten Noether-Theorem (Emmy Noether, Erlangen, 1918) abgeleitet. Im Falle der elektrischen Ladung folgt zunächst aus der lokalen Eichsymmetrie der Lagrangedichte der elektromagnetischen Wechselwirkung der lokale Erhaltungssatz.

Die Eichsymmetrie kann man dabei wie folgt verstehen: man wende auf A eine Transformation ξ an

$$A \rightarrow {}^\xi A = A - d\xi \quad (1.13)$$

Dabei ändert sich F gemäß

$$F \rightarrow {}^\xi F = d {}^\xi A = dA - d^2 \xi \quad (1.14)$$

Der letzte Term fällt wiederum wegen der Antisymmetrie der äußeren Ableitung weg; somit ist F invariant unter dieser Eichtransformation. Der Vorteil der Ableitung von Erhaltungssätzen über das Noether-Theorem, die i.A. ziemlich verwickelt ist und hier nicht dargestellt werden soll, liegt darin, dass die Feldgleichungen selbst nicht verwendet werden müssen.

Die Existenz einer lokalen Eichsymmetrie bedeutet im Wesentlichen, dass die Theorie unphysikalische Freiheitsgrade enthält. Zum einen hat man vier Komponenten des Viererpotentials A , zum anderen hat das physikalische Photonfeld allerdings nur zwei (transversale) Polarisationsrichtungen. Man eliminiert die beiden unphysikalischen Polarisationsrichtungen wie folgt: Zunächst wählt man eine Eichtransformation ξ so, dass ${}^\xi A = 0$ gilt. Aus den Maxwellgleichungen folgt mit dieser Wahl eine spezielle Gleichung, das sogenannte Gaußsche Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = j^0 \quad (1.15)$$

$\mathbf{E}$ sind die in F enthaltenen elektrischen Feldstärken, j^0 die Nullkomponente, d.h. die Ladungsdichte. Das Gaußsche Gesetz fungiert dabei als sogenannter Generator der entsprechenden Eichsymmetrie; es enthält keine Zeitableitung und garantiert damit, dass die einmal gewählte Eichung ${}^\xi A = 0$ bei Zeitentwicklung erhalten bleibt. Damit kann das Gaußsche Gesetz zu jedem Zeitpunkt invertiert werden und somit eine Polarisierung aus $\mathbf{E}$ über j^0 ausgedrückt werden. Physikalisch erhält man nach Eliminierung der unphysikalischen Freiheitsgrade aus der Lagrangedichte das Coulomb-Potential zwischen den entsprechenden Ladungsdichten j^0 . Für diese Ableitung ist die exakte Form der Eichbedingung, hier $A^0 = 0$, nicht wichtig; andere Eichbedingungen sind möglich und können der jeweiligen Problemstellung angepasst werden.

Die oben betrachtete Form der Erhaltungssätze der klassischen Elektrodynamik kann verallgemeinert werden; so gilt in einer nicht-abelschen Eichtheorie

$$Dj = 0 \quad (1.16)$$

Dabei ist

$$D. = (d + A) \wedge . \quad (1.17)$$

die kovariante Ableitung einer beliebigen Größe bzgl. des Eichfeldes A . Indizes der Eichgruppe sind dabei in der matrixwertigen Funktion $A = A^a t^a$ mit den Generatoren t^a enthalten. Die Stromerhaltung lässt sich in Eichtheorien wie folgt umschreiben:

$$dJ = 0 \quad (1.18)$$

Dabei steht d wieder für das äußere Differential und J für eine neue lokale Viererstromdichte

$$J = j + A \wedge F \quad (1.19)$$

Wir werden später sehen, dass in einer geeignet erweiterten Form der ART die Energie-Impuls-Dichte über einen teilweise äquivalenten Formalismus definiert werden kann.

Aus der lokal erhaltenen Viererstromdichte $J = (J^0, \mathbf{J})$ wird eine global erhaltene Ladung konstruiert: zunächst gilt

$$\partial_0 J^0 = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (1.20)$$

Integration der linken Seite über ein Volumen V sowie Ausnutzung des Gaußschen Integralsatzes auf der rechten Seite liefert

$$q = \int dV J^0 \quad (1.21)$$

mit

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (1.22)$$

Dabei wurde angenommen, dass die Stromdichten im Unendlichen (bzw. auf der Oberfläche des betrachteten Volumens) verschwinden. In der ART dieser letzte Schritt, nämlich der Übergang von lokalen zu globalen Größen nur noch in Spezialfällen möglich.

2 Energie in der Allgemeinen Relativitätstheorie

2.1 Die Problematik des Energiebegriffs in der Relativitätstheorie

Die o.g. Ableitung einer erhaltenen Energie funktioniert in der ART aus mehreren Gründen nicht:

- a) Die aus Symmetrien (z.B. Noether-Theorem) abgeleitete Energiedichte beinhaltet nicht das Gravitationsfeld, sondern ausschließlich die an das Gravitationsfeld koppelnde Materie und Felder.
- b) Zunächst kann über diese Energiedichte nur beim Vorliegen zusätzlicher Symmetrien (Killingvektorfelder) eine integrale Erhaltungsgröße entsprechend der Energie definiert werden.
- c) Ohne diese Bedingungen erlaubt der tensorielle Charakter Energiedichte zunächst keine Konstruktion einer erhaltenen Energie, d.h. des Energieinhalts eines bestimmten Volumens im Raum; Ursache ist zunächst die mathematische Struktur der Theorie, die physikalische Interpretation folgt aus der dynamischen Geometrie der Raumzeit und der damit verbundene Abstrahlung von Energie über Gravitationswellen.

- d) Abhilfe schafft die Konstruktion eines erweiterten Energiebegriffs, der auch die Beiträge des Gravitationsfeldes mit einschließt; dies hat jedoch zur Folge, dass so definierte Energiedichte keine kovarianten Transformationseigenschaften aufweist.
- e) Des Weiteren gehorcht diese Konstruktion im Gegensatz zur o.g. Ableitung aus allgemeinen Symmetrieprinzipien keinem fundamentalen physikalischen Prinzip (z.B. Diffeomorphismen-Invarianz, kanonische Definition, Noether-Theorem bzgl. einer globalen oder einer Eichsymmetrie); daher ist die so konstruierte Energiedichte nicht eindeutig definiert; ggf. drückt sich diese Nichteindeutigkeit auch in der Energie selbst aus.
- f) Eine Alternative stellt die (ebenfalls nicht eindeutig) definierte sogenannte nicht-lokale Energie dar, die über die gravitative Wirkung verursacht durch die Feldkonfiguration innerhalb eines bestimmten Volumens definiert wird.
- g) Zuletzt werden wir sehen, dass in der ECT, einer mathematisch motivierbaren Erweiterung der ART, außerdem bereits der lokale Energieerhaltungssatz (die kovariante Konstanz des Energie-Impuls-Tensors) durch die Anwesenheit einer nicht-verschwindenden Torsion, verursacht durch die Spindichte der Materie, verletzt ist, d.h. eine Anomalie entwickelt.

2.2 Die lokalisierte Energie aus dem Energie-Impuls-Tensor

Der auf der Raumzeit definierte metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ sowie der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ erfüllen die Einstein-Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

$R_{\mu\nu}$ ist dabei der aus dem Riemannschen Krümmungstensor abgeleitete Ricci-Tensor, R ist der (kontrahierte) Ricci-Skalar. Man erwartet, dass sich der Energieinhalt eines Raumgebietes aus $T_{\mu\nu}$ und damit letztlich aus der Metrik $g_{\mu\nu}$ ableiten lässt.

In der ART folgt die Ableitung des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ einem völlig anderen Prinzip als die Ableitung der Kontinuitätsgleichung für J_μ in Eichtheorien. Es werden nicht eine Symmetrie der Theorie sowie die Anwendung des Noether-Theorems zugrunde gelegt, sondern stattdessen die Diffeomorphismen-Invarianz der ART verwendet. Es ist nicht trivial, zu zeigen, dass die Ableitung eines Energie-Impuls-Tensors aus der Poincare-Symmetrie bzw. einer geeigneten lokalen Eichsymmetrie entsprechend dem Noether-Theorem auf einen äquivalenten Ausdruck führt. Siehe dazu den Abschnitt zur Einstein-Cartan-Theorie.

Zunächst wird in der ART die vektorielle Stromdichte = ein Tensor der Stufe $(1,0)$ durch eine Energie-Impuls-Dichte = einen Tensor der Stufe $(2,0)$ ersetzt:

$$DT = 0 \quad (2.24)$$

Dabei ist nun

$$D. = (d + \Gamma) \wedge . \quad (2.25)$$

die kovariante Ableitung beliebiger $(2,0)$ Tensoren bzgl. des Zusammenhangs $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Im Falle der ART ist der Levi-Cevita-Zusammenhang durch die Metrik eindeutig bestimmt, d.h. $\Gamma = \Gamma[g]$. Zunächst ist der Energie-Impuls-Tensor kovariant konstant; daraus lässt sich i.A. jedoch keine global erhaltene Energie gewinnen, da der Gaußsche Integralsatz in

$$DT = dT + [\Gamma, T] = 0 \quad (2.26)$$

nur auf den ersten Summanden anwendbar ist. Der vom Gravitationsfeld stammende zweite Term der kovarianten Ableitung verhindert die Konstruktion eines integralen Erhaltungssatzes, die oben im Rahmen der Eichtheorien diskutierte Umformung ist hier nicht möglich.

Dieses negative Ergebnis ist nicht überraschend, da in T lediglich die Energie der Quellen (z.B. der Materie) des Gravitationsfeldes enthalten ist und somit Energietransport durch Gravitationswellen bzw. -umwandlung aus Energie der Quellen in rein gravitative Energie im Vakuum außerhalb der Quellen nicht berücksichtigt wird.

Für eine stationäre Raumzeit in der keine Gravitationswellen auftreten, also bei Vorliegen einer zeitartigen Translationssymmetrie der Raumzeit = eines zeitartigen Killingvektorfeld ξ existiert ein integraler Erhaltungssatz. Man definiert dazu durch Überschieben den Viererstrom

$$t_\mu = T_{\mu\nu} \xi^\nu \quad (2.27)$$

Aus t folgt mit den Eigenschaften des Killingvektorfeldes ξ sowie der jetzt möglichen Anwendung des Gaußsche Satzes bzgl. einer raumartigen 3-Mannigfaltigkeit die Erhaltungsgröße

$$E = \int dV t^0 \quad (2.28)$$

Die Einführung des Killingvektorfeldes entspricht dabei einer lokalen, zeitartigen Translation der Raumzeit, vergleichbar der globalen Zeittranslation im Falle des Noether-Theorems. Demzufolge funktioniert diese Vorgehensweise nur, wenn für die zu betrachtende Raumzeit eine spezielle Symmetrie vorliegt, die eben ein zeitartiges Killingvektorfeld zulässt. Dies ist aber z.B. für kosmologische Lösungen der ART für ein expandierendes (nicht-stationäres) Universum sowie für nicht-stationäre inhomogene und anisotrope Modelle nicht mehr der Fall. Daher scheidet diese Konstruktion einer erhaltenen Energie i.A. aus!

2.3 Die lokalisierte Energie aus dem Energie-Impuls-Pseudotensor

Zielsetzung ist es also, einen verallgemeinerten Ausdruck $\tilde{T}$ zu finden, der einerseits die Energie des Gravitationsfeldes mit berücksichtigt, und für den andererseits die Kontinuitätsgleichung $DT = 0$ durch

$$d\tilde{T} = 0 \quad (2.29)$$

ersetzt wird. $\tilde{T}$ geht dabei aus T durch eine Gleichung

$$\tilde{T} = -\det g (T + \tilde{\tau}) \quad (2.30)$$

hervor, wobei $\tilde{\tau}$ die Energie-Impuls-Anteile des Gravitationsfeldes repräsentiert. $\tilde{T}$ kann aufgrund der o.g. Kontinuitätsgleichung selbst kein Tensor sein, d.h. $\tilde{T}$ wird kein Lorentz-kovariantes Transformationsverhalten haben! I.A. spricht man hier von einem sogenannten Pseudotensor, was jedoch irreführend ist, da ein Pseudotensor im mathematischen Sinne lediglich unter Raumspiegelung anders transformiert als ein Tensor, während $\tilde{T}$ i.A. auch bzgl. eigentlichen Lorentztransformationen nicht kovariant transformiert.

Die Verwendung einer nicht-kovarianten Größe wird dadurch gerechtfertigt, dass nicht $\tilde{T}$ selbst sondern lediglich die daraus abgeleiteten Integrale physikalische Verwendung finden. Deren Definition bricht jedoch selbst explizit die vollständige Symmetrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit durch Einführung einer dreidimensionalen Hyperfläche bzw. der Forderung der asymptotischen Flachheit der Mannigfaltigkeit im Unendlichen; letztere ist Voraussetzung für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes. Die Verwendung nicht-kovarianter Objekte ist nicht unbedingt verboten; so sind die bekannten Christoffelsymbole ebenfalls keine kovarianten $(2,1)$ Tensoren.

Zudem spiegelt sich hier das Äquivalenzprinzip wieder, gemäß dem es für jedes Gravitationsfeld möglich ist, auf ein mitbewegtes Koordinatensystem (das einem im Gravitationsfeld frei fallenden Beobachter entspricht) zu transformieren, in dem lokal das Gravitationsfeld identisch Null ist (d.h. für den Beobachter verschwindet). Dies bedeutet, dass in diesem mitbewegten Koordinatensystem zusammen mit dem Gravitationsfeld auch dessen Energie-Impuls-Pseudotensor $\tilde{\tau}$ vollständig verschwindet. Die Konstruktion von $\tilde{\tau}$ und damit die Form von $\tilde{T}$ sind keineswegs eindeutig. Bekannte Konstruktionen stammen von Einstein selbst, Schrödinger, Landau, Bargmann und Weinberg. Landaus klassische Definition von $\tilde{\tau}$ nach gehorcht folgenden Prinzipien:

- $\tilde{T}$ erfüllt im oben genannten Sinne einen lokalen Erhaltungssatz
- $\tilde{\tau}$ ist ableitbar aus der Metrik, d.h. kodiert ausschließlich geometrische Eigenschaften
- $\tilde{\tau}$ und somit $\tilde{T}$ sind symmetrisch, d.h. erlauben die Definition eines erhaltenen Drehimpulses
- $\tilde{\tau}$ verschwindet lokal in einem (frei fallenden) Inertialsystem; d.h. die gravitative Energie verschwindet, sobald das Feld selbst verschwindet.

Man beachte, dass dies zwar physikalisch sinnvoll ist (kein Gravitationsfeld = keine gravitative Energiedichte), dass dies jedoch explizit gegen Tensoreigenschaften verstößt.

Andere Konstruktionen als die Landaus sind möglich, folgen ggf. anderen Prinzipien und haben daher evtl. andere Vor- bzw. Nachteile. Aus dieser Definition von $\tilde{T}$ folgen nun erhaltene Integrale für Energie und Impuls $P^\mu = (E, \mathbf{P})$ sowie Drehimpuls

$$P^\mu = \int dV \tilde{T}^{0\mu} \quad (2.31)$$

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0 \quad (2.32)$$

Damit für die Energie $E = P^0$ der Erhaltungssatz $dE/dt = 0$

2.4 Die nicht-lokale Energie bzw. Masse

In diesem Abschnitt wird – im Gegensatz zu den bisherigen Diskussionen – von Masse statt Energie die Rede sein. Ursache ist im wesentlichen, dass bisher Objekte diskutiert wurden, deren Transformationsverhalten dem der Null-Komponente des Impuls-Vierervektors $P^\mu = (E, \mathbf{P})$ entsprachen, während im Folgenden der Ruhemasse $m^2 = E^2 - \mathbf{P}^2$ analoge Objekte betrachtet werden.

Falls ein System von Quellen T für ein Gravitationsfeld in einem endlichen Raumbereich lokalisiert ist, wird die Geometrie der Raumzeit im Unendlichen asymptotisch gegen die Minkowski-Metrik streben. Man nutzt diese Eigenschaft aus, eine weitere, nicht-lokale Energiedefinition einzuführen. Einschränkungen ähnlich der asymptotischen Flachheit gelten auch für andere Definitionen, z.B. der o.g. Konstruktion über ein zeitartiges Killingvektorfeld, da zur Anwendung des Gaußschen Integralsatzes vorausgesetzt wird, dass das Oberflächenintegral verschwindet.

Wir betrachten zunächst zwei Konstruktionen, nämlich die ADM-Masse (ADM für Arnowitt, Deser und Misner) bzw. die Bondi-Masse. Im Sinne des Noether-Theorems entsprechen diese Energiedefinitionen asymptotischen Symmetrien der Raumzeit im räumlichen bzw. lichtartigen Unendlichen. Für die ADM-Masse wird eine Definition eingeführt, die auf der gravitativen Wirkung des Raumbereiches im Inneren einer Kugelschale mit Radius R beruht. Die Definition für eine unendliche (raumartige) Kugelschale gemäß ADM lautet

$$M_\infty \sim \int dV (K - K^{\text{ref.}}) \quad (2.33)$$

wobei die Differenz der äußeren Krümmungen K und K^0 bezogen auf die volle Metrik g sowie die flache Metrik $g^{\text{ref.}}$ verwendet wird. Eine weitere nicht-lokale Massen- bzw. Energiedefinition folgt wiederum aus der Existenz eines zeitartigen Killingvektorfeldes ξ . Man definiert nach Komar die Masse M_∞ gemäß

$$M_\infty \sim \int \star d\xi \quad (2.34)$$

als Integral über die zu $d\xi$ duale Zwei-Form $\star d\xi$ über ein raumartiges Volumen. Die beiden nicht-lokalen Massen nach ADM sowie Bondi stimmen überein, sofern der Normaleneinheitsvektor der jeweiligen Oberfläche einem zeitartigen Killingvektor entspricht. Außerdem kann man zeigen, dass für bestimmte Lösungen der ART (z.B. die stationäre Schwarzschildlösung) diese nichtlokalen Energiedefinitionen mit anderen o.g. lokalen Definitionen übereinstimmen.

Die wesentliche Problematik der Definition einer erhaltenen Energie zeigt sich erst bei der Betrachtung nicht-stationärer Lösungen für endlichen Volumina; für stationäre Lösungen mit zeitartigem Killing-Vektor (z.B. auch Schwarzschild- oder Kerr-Lösung) sind die meisten bekannten Ansätze äquivalent. Insbs. in der Kosmologie interessieren aber nicht-stationäre, expandierende Lösungen (z.B. die FRW-Modelle) ohne zeitartigen Killing-Vektor.

Brown und York betrachten die zeitliche Entwicklung eines dreidimensionalen, berandeten Gebietes V der Raumzeit und definieren eine Metrik bzgl. der durch die Zeitentwicklung des (zweidimensionalen) Randes ∂V aufgespannten dreidimensionalen Randes (einer "Röhre" entlang der Zeitrichtung). Die auf diesem Rand induzierte Metrik erlaubt die Ableitung eines diesbezüglichen Energie-Impuls-Tensors. Brown und York definieren

auf dem dreidimensionalen Gebiet V die Energiedichte ϵ durch (zweifache) Projektion des zugehörigen Energie-Impuls-Tensors auf die Normalenvektoren des dreidimensionalen Gebiets. Damit ergibt sich eine Definition der Masse mittels Integration über die zweidimensionale Fläche ∂V gemäß

$$M[V] = \int dV \epsilon \quad (2.35)$$

Analog zu ADM betrachtet man nun die äußere Krümmung k von ∂V sowie analog zu ADM das Integral über k bezogen auf eine (isometrisch eingebettete) Minkowski-Referenzgeometrie und deren Krümmung $k^{\text{ref.}}$. Diese Einbettung ist streng genommen nicht eindeutig, da nicht zwei verschiedene Geometrien (gekrümmt und flach) in “derselben” Raumzeit verglichen werden können; zwei verschiedene Geometrien = zwei verschiedene Raumzeiten verbieten es, zwei Raumbereiche miteinander zu identifizieren. Die Definition von Brown und York lautet

$$M[V] \sim \int dV k - \int dV^{\text{ref.}} k^{\text{ref.}} \quad (2.36)$$

Angewandt auf die Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (2.37)$$

erhält man in Abhängigkeit des Volumens $V(r)$

$$M(r) \sim ar \left(1 - \sqrt{1 - \kappa r^2} \right) \quad (2.38)$$

Im Falle des flachen FRW-Universums mit $\kappa = 0$ erhält man

$$M = 0 \quad (2.39)$$

Andererseits liefert das Milne-Universum $\kappa = -1$, $a(t) \sim t$ (einer anderen Darstellung der flachen Minkowski-Raumzeit) ein Ergebnis

$$M > 0 \quad (2.40)$$

Dies kann als Versagen der oben verwendeten Definition der Blätterung der Raumzeit sowie des zu speziellen Ansatzes der äußeren Krümmung angesehen werden.

Epp verwendet eine verallgemeinerte Definition der äußeren Krümmung als Spur der zweiten Fundamentalform, die die Abhängigkeit von der gewählten Blätterung eliminiert. Außerdem führt Epp eine andere Art der Einbettung der Referenzgeometrie ein.

$$M[V] \sim \int dV h - \int dV^{\text{ref.}} h^{\text{ref.}} \quad (2.41)$$

Anwendung auf die Robertson-Walker-Metrik liefert

$$M(r) \sim ar \left(1 - \sqrt{1 - \kappa r^2 - r^2 \dot{a}^2} \right) \quad (2.42)$$

Man betrachtet nun wieder die Spezialfälle des flachen FRW-Universums $\kappa = 0$

$$M \sim ar \left(1 - \sqrt{1 - r^2 \dot{a}^2} \right) \quad (2.43)$$

sowie des Milne-Universums $\kappa = -1$, $a(t) \sim t$

$$M = 0 \quad (2.44)$$

Zum einen liefert die nicht-lokale Energie nach Epp eine nicht-verschwindende Energie des flachen FRW-Universums, zum anderen reduziert sie sich im Falle des Milne-Universums wie erwartet auf $M = 0$. Dies lässt sich auf jeden beliebigen zweidimensionalen Rand im Minkowski-Universum verallgemeinern. Topologisch inäquivalente Raumzeiten wie das deSitter Universum können ebenfalls behandelt werden.

Speziell für die statische Schwarzschild-Lösung mit der Berandung $\partial V = S^2$ in Form einer Kugeloberfläche liefern sowohl die Definition gemäß Brown und York als auch die gemäß Epp die Werte

$$M_{\text{Horizont}} = 2m \quad (2.45)$$

$$M_{\infty} = m \quad (2.46)$$

wobei m den in der Schwarzschild-Lösung auftretenden Massenparameter darstellt. Interessanterweise liefert die lichtartige Fläche des Ereignishorizontes das Zweifache des erwarteten Wertes, d.h. dass die gravitative "Masse" des schwarzen Lochs monoton mit steigendem Radius r des Beobachters der gravitativen Wirkung fällt. Generell erhält man nach Epp für die Grenzwerte im räumlichen bzw. lichtartigen Unendlichen die bekannten Ausdrücke gemäß ADM bzw. Bondi.

Die hier diskutierten Definitionen nach Brown und York bzw. Epp basieren auf der Hamilton-Jacobi Methode. Weitere, im Detail abweichende Definitionen der nicht-lokalen Energie sind bekannt; zu erwähnen sind insbs. die verschiedenen Versionen der Hawking-Energie, die auf Twistor-Konstruktionen basierenden Versionen der Penrose-Energie sowie die Nester-Witten 2-Form Konstruktionen. Alle diese Definitionen stimmen in manchen (nicht in allen) physikalischen Eigenschaften überein (asymptotische Masse - z.B. von SLs, Positivität, ...), weichen allerdings in manchen anderen Szenarien voneinander ab. Es sollte somit klar geworden sein, dass bisher keine allgemein akzeptiert, aus einem fundamentalen Prinzip ableitbare nicht-lokale Energiedefinition bekannt ist. Es ist unklar bzw. umstritten, ob dies überhaupt möglich ist.

Eine wesentliche Problematik einiger der oben diskutierten Zugänge ist die Notwendigkeit der Einführung einer (nicht-eindeutig definierten!) Referenz-Metrik zur Subtraktion der Beiträge des flachen Raumes; Definitionen ohne eine derartige Referenz-Metrik wie die Hawking- sowie die Geroch-Energie erscheinen vorteilhaft, allerdings diese weisen diese andere Nachteile auf, so lassen sie u.a. keine Definition des Viererimpulses sowie des Drehimpulses zu; zudem zeigen sie für Oberflächen mit komplizierteren Geometrien bzw. Topologien teilweise pathologisches Verhalten auf.

Eine wichtige Gemeinsamkeit aller nicht-lokalen Konstruktionen ist jedoch, dass die Energie immer über ein Oberflächenintegral definiert ist; dies ist ein erster Hinweis auf das holographische Prinzip, demzufolge die Dynamik eines Raumbereiches V vollständig durch eine äquivalente, nieder-dimensionale Theorie ausschließlich auf der Oberfläche ∂V des Raumbereiches V beschrieben wird. Das holographische Prinzip findet insbs. Anwendung bei der Berechnung von Eigenschaften von schwarzen Löchern (Energie, Entropie) und wird hier im Wesentlichen bestätigt; allerdings hat es lediglich den Status einer Vermutung, d.h. es existiert kein allgemeingültiger Beweis.

2.5 Zusammenfassung

Folgende nicht äquivalenten Energiedefinitionen wurden diskutiert:

- a) die Energie definiert über den Energie-Impuls-Tensor unter der Voraussetzung der Existenz eines zeitartigen Killingvektorfeldes
- b) die Energie einschließlich der des Gravitationsfeldes definiert über den Energie-Impuls-Pseudotensor
- c) die nicht-lokale Energie definiert über die gravitative Wirkung eines Raumbereiches

Dabei liegt lediglich (a) ein fundamentales Prinzip zugrunde, während (b) und (c) zwar physikalisch motiviert jedoch teilweise nur ad-hoc konstruiert werden; dementsprechend sind für (b) und (c) jeweils nicht-äquivalente Versionen bekannt, die nicht immer den selben Gültigkeitsbereich (im Raum aller Lösungen der ART) haben bzw. deren Werte teilweise voneinander abweichen. Während also die Energie des nicht-gravitativen Anteils zwar exakt definierbar ist, für sich alleine jedoch keine Erhaltungsgröße darstellt, entzieht sich die Energie des Gravitationsfeldes selbst einer derart eindeutigen und schlüssigen Definition. Im Falle von c) ergeben sich Hinweise auf das holographische Prinzip.

3 Energie in der Einstein-Cartan-Theorie

3.1 Einführung

Die Kopplung von Spinoren an die Krümmung der Raumzeit ist im Rahmen der Einsteinschen ART nicht möglich und erfordert die Konstruktion eines verallgemeinerten Spin-Zusammenhangs ω , der an die Stelle des metrischen Zusammenhangs Γ tritt. Dabei wird die Struktur der zugrundeliegenden Riemannschen Mannigfaltigkeit auf eine sogenannte Riemann-Cartansche Mannigfaltigkeit erweitert, wobei letztere in Anwesenheit von Materie zusätzlich zur Krümmung R eine nicht-verschwindende Torsion Q erlaubt; dies bedeutet anschaulich, dass infinitesimale Parallelogramme nicht schließen.

Im Gegensatz zur Krümmung führt die Torsion nicht zu weiteren Freiheitsgraden der Theorie: die Torsion propagiert nicht, d.h. es gibt keine Torsionswellen. Stattdessen kann die Torsion rein algebraisch durch die intrinsische Spindichte S der Materie ausgedrückt werden, sie ist also im Vakuum identisch Null; dies ist auch der Grund, warum ihr experimenteller Nachweis gegenwärtig nicht möglich ist und somit die Einsteinsche und die Einstein-Cartansche Theorie (ECT) zunächst physikalisch nicht unterschieden werden können.

3.2 Formalismus

Ausgangspunkt ist die Erweiterung der Einstein-Hilbert-Wirkung zur Einstein-Cartan-Wirkung, die von erster Ordnung in den unabhängigen Variablen e_μ^i , den sogenannten Vierbeinen, und ω_k^i , dem sogenannten Spin-Zusammenhang ist. Für die zugrundeliegende Riemann-Cartansche Mannigfaltigkeit erhält man die Metrik $g_{\mu\nu}$ gemäß

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} e_\mu^i e_\nu^k \quad (3.47)$$

Dabei entsprechen die Indizes $i, k, \dots$ den Indizes im (flachen) Minkowski-Tangentialraum TM_P am Punkt P , die Indizes $\mu, \nu, \dots$ denen in der (gekrümmten) Raumzeit. Die Metrik η entspricht der flachen Minkowski-Metrik.

Der aus der ART bekannte Christoffel-Zusammenhang Γ folgt dabei aus den Vierbeinen e sowie dem Spin-Zusammenhang ω gemäß

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_i^\lambda (\partial_\mu e_\nu^i + \omega_{\mu k}^i e_\nu^k) \quad (3.48)$$

Der affine Zusammenhang ω enthält in der ECT sowohl den Levi-Cevita-Zusammenhang Γ als auch einen von der Torsion Q abhängigen Term

$$\omega_{\text{ECT}} = \omega_{\text{Levi-Cevita}} + \omega_{\text{Torsion}} \quad (3.49)$$

Der zweite Term verschwindet in der ART identisch.

Wie bereits oben erwähnt kann die Torsion Q durch die Vierbeinen e sowie dem Spin-Zusammenhang ω ausgedrückt werden

$$T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b \quad (3.50)$$

T hängt dabei letztlich rein algebraisch von der Spindichte S der Materie ab

$$Q = Q[S] \quad (3.51)$$

Mittels dieser letzten Gleichung kann die Torsion vollständig zugunsten der Materiefelder aus allen Gleichungen der ECT eliminiert werden. Außerdem folgt unmittelbar, dass Spindichte und damit Torsion im Vakuum identisch verschwinden.

3.3 Die Energie in der Einstein-Cartan-Theorie

Sowohl die Feldgleichungen der ART als auch die Kontinuitätsgleichung für den Energie-Impuls-Tensor werden durch die nichtverschwindende Torsion in der ECT modifiziert.

Man erhält formal eine der Einsteingleichung äquivalent Feldgleichung sowie eine neue Gleichung, die die Torsion mit der Spindichte der Materie in Zusammenhang bringt. Konstruiert man nun die entsprechende Kontinuitätsgleichung $DT = 0$ für den Energie-Impuls-Tensor, so findet man jedoch, dass diese durch das Auftreten der Torsion eine "Anomalie" entwickelt:

$$8\pi G D_\nu T_\mu^\nu = 2 Q_{\mu\nu}^\rho R_\rho^\nu - Q_{\nu\sigma}^\rho R_{\mu\rho}^{\sigma\nu} \quad (3.52)$$

Kovariante Konstanz des Energie-Impuls-Tensors gilt im Spezialfall bei verschwindender Torsion $Q = 0$. Die Anomalie ist somit unter normalen Umständen innerhalb von Materie extrem klein sowie außerhalb d.h. im Vakuum wegen $Q = Q[S]$ exakt Null, weswegen eine experimentelle Unterscheidung zwischen ART und ECT nicht möglich ist.

3.4 Bedeutung der Einstein-Cartan-Theorie

Der Schlüssel zum Verständnis des zunächst aufwändigeren Formalismus der ECT ist die Einführung der vollen Poincare-Gruppe einschließlich der Raumzeit-Translationen als Symmetriegruppe der Raumzeit; die ECT stellt somit eine natürliche Verallgemeinerung der ART dar. Daraus folgt zunächst, dass die ECT als Eichtheorie bzgl. der Poincare-Symmetrie darstellbar ist, sowie dass die Konstruktion des Energie-Impuls-Tensors T bzw. des Spin-Tensors S als Noether-Ströme bzgl. der Translationen bzw. der Rotationen der Poincare-Gruppe möglich ist. Diese Konstruktion wird transparent durch die Einführung des affinen Zusammenhangs als unabhängige Variable neben der Metrik (bzw. der Vierbeine, die an die Stelle der Metrik treten, die lediglich als abgeleitete Größe auftritt).

Mathematisch unterscheidet die ECT sauber zwischen dem Begriff des (flachen Minkowski-)Tangentialraumes TM_P mit den Vierbeinen e als lokaler Basis (sowie den in ihm definierten Objekten) zu einem Raumzeitpunkt P in der Einstein-Cartan Mannigfaltigkeit M_{EC} . Dabei entspricht die Einführung des Tangentialraumes der Konstruktion eines Faserbündels einer Eichsymmetrie; die Fasern über jedem Punkt der Raumzeit repräsentieren dabei die Orbits der Eichgruppe. Die lokale Eichsymmetrie der Lorentzgruppe entspricht dabei einer lokalen Wahl eines Koordinatensystems je Tangentialraum TM_P , d.h. beim Übergang zwischen benachbarten Punkten der Raumzeit erfahren die Koordinatensysteme (repräsentiert durch die Vierbeine) eine Lorentz-Transformation.

Ohne diese Unterscheidung zwischen Mannigfaltigkeit M und Tangentialraumbündel TM ist der begriffliche Unterschied zwischen der Ableitung eines Energie-Impuls-Tensors über die Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung nach der Metrik einerseits und der Ableitung über die Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung nach dem affinen Zusammenhang andererseits unklar.

Man beachte jedoch, dass die hier dargestellte Analyse nicht wie im Falle der ART die Energie des Gravitationsfeldes mit einbezieht.

Ausblick: Die ECT erscheint in gewisser Weise "mathematisch einfacher" als die ART, da sie in letzterer verwobene Konzepte sauber trennt. Explizit werden diese Vorteile durch die Variablenwahl von Sen, Ashtekar und Barbero, die im Rahmen der LQG benutzt wird; demzufolge sollte die ECT, nicht die ART, als klassischer Grenzfall aus der LQG hervorgehen. Die $N = 1$ Supergravitation ohne zusätzliche Materie- bzw. Eichfelder ist äquivalent zu einer ECT mit der Kopplung an ein masseloses Spin-3/2 Rarita-Schwinger-Feld, das sogenannte Gravitino; dieses übernimmt die Rolle des SUSY-Partners des Gravitons.

3.5 Zusammenfassung

Im Falle der ECT lässt sich die nicht-gravitative Energiedichte aus einer lokalen Eichsymmetrie konstruieren. Damit ist die ECT eine Verwandte der bekannten Eichtheorien und die Energiedichte dementsprechend das Analogon zu einer (im Rahmen der bekannten Eichtheorien erhaltenen) Ladungsdichte. Dies entspricht dem im Falle der ART diskutierten Fall (a).

Die Diskussion von (b) und (c) ist aus mehreren Gründen unterblieben: Eine umfassende Literatur zu diesen Themenkomplexen liegt nicht vor. Die Umformulierung der ECT als Eichtheorie verspricht im Bezug auf (b) und (c) wenig Fortschritte, da diese explizit ohne dieses fundamentale Prinzip diskutiert wurden.

Damit bleibt schlussendlich dieselbe Folgerung wie im Rahmen der ART: die Energie des Gravitationsfeldes entzieht sich bisher einer eindeutigen und schlüssigen Definition. Fortschritte erwarte ich jedoch insbs. im Rahmen der ECT, da diese durch die eichtheoretische Formulierung den mathematisch saubersten Rahmen bietet.

4 Fragen zur Energie des Gravitationsfeldes

- a) Existiert ein fundamentales Prinzip, aus dem innerhalb der ART ein eindeutiger Ausdruck für die Energie-Impuls-Dichte einschließlich des Beitrags des Gravitationsfeldes gewonnen werden kann?
- b) Existiert ein fundamentales Prinzip, aus dem eine eindeutige Definition einer “verallgemeinerten” Energie als integraler Erhaltungsgröße hergeleitet werden kann? Bzw. unter welchen (möglichst allgemeinen) Umständen stimmen die oben diskutierten globalen Definitionen für die Energie überein?
- c) Sind diese Prinzipien zur Definition einer lokalen Energie-Impuls-Dichte bzw. einer “verallgemeinerten” Energie als integraler Erhaltungsgröße auch im Rahmen der ECT anwendbar bzw. sind geeignete Erweiterungen bekannt?
- d) Ist eine der o.g. Definitionen der Energie einschließlich des gravitativen Beitrags als thermodynamische Zustandsgröße geeignet?
- e) Kann die so definierte Energie mit anderen thermodynamische Zustandsgröße in Verbindung gebracht werden? Ist insbs. eine erweiterte Definition der Entropie des Gravitationsfeldes möglich?

5 Der kanonische Formalismus

5.1 Klassische Mechanik

Die LQG entwickelt zunächst einen kanonischen Formalismus und nutzt diesen zur hamiltonschen Quantisierung der Gravitation. Der kanonische Formalismus ist in der klassischen Mechanik dem Lagrange-Formalismus äquivalent, beruht jedoch im Detail auf mathematisch unterschiedlichen Strukturen.

Während im Lagrangeformalismus die Lagrangefunktion mit den (verallgemeinerten) Orten $x(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{x}(t)$ verwendet wird

$$L = L[x(t), \dot{x}(t)] \quad (5.53)$$

erhält man die Hamiltonfunktion

$$H = H[x(t), p(t)] \quad (5.54)$$

in Abhängigkeit von den (verallgemeinerten) Orten $x(t)$ und (verallgemeinerten kanonischen) Impulsen $p(t)$ aus der Transformation

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (5.55)$$

$$H = p\dot{x} - L[x, \dot{x}] \quad (5.56)$$

Dabei ist $\dot{x}(t)$ aus H über die Invertierung der ersten Gleichung zu eliminieren. Ebenso wie man aus L bzw. der Minimierung der Wirkung

$$S = \int dt L[x, \dot{x}] \quad (5.57)$$

die Bewegungsgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (5.58)$$

gewinnen kann, sind die Bewegungsgleichungen damit als Hamiltonsche Gleichungen aus H ableitbar:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (5.59)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.60)$$

5.2 Relativistische Mechanik

Im Rahmen der klassischen Mechanik kann man üblicherweise die Hamiltonfunktion mit der (erhaltenen) Energie des Teilchens identifizieren $E = H$ (erhalten dann, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. translationsinvariant in der Zeit ist)

In der speziellen Relativitätstheorie betrachtet man die relativistischen Wirkung, d.h. die (vierdimensionale) Länge der Weltlinie des Teilchens der Masse m

$$S = -m \int ds = \int dt L[x, \dot{x}] \quad (5.61)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung entspricht dabei der Forderung, dass die Weltlinie einer Geodäten, also der kürzesten Verbindung zweier Punkte im Raum entspricht. Dieser Formalismus ist auch folglich auch auf gekrümmten Raumzeiten im Rahmen der ART anwendbar. Man erhält durch Anwendung die Vierergeschwindigkeiten sowie die Viererimpulse.

Bei der Konstruktion der Hamiltonfunktion H mit

$$H^2 = p^2 - m^2 = E^2 + \mathbf{p}^2 - m^2 \quad (5.62)$$

tritt allerdings eine Besonderheit auf. Zunächst lassen sich aus H wiederum die Bewegungsgleichungen ableiten; außerdem gilt für jede Lösung die Bedingung

$$p^2 - m^2 = 0 \quad (5.63)$$

D.h. die relativistische Hamiltonfunktion H verschwindet identisch auf dem Raum der Lösungen! Damit kann sie im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall nicht für eine Definition einer Gesamtenergie herangezogen werden, denn aus der Definition der Viererimpulse weiß man, dass die Null-Komponente des Vierervektors $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p})$ der Energie entspricht.

Diese Eigenschaft folgt aus der Reparametrisierungsinvarianz der Weltlinie und liegt letztlich auch der Diskussion bzgl. der Zeitlosigkeit der ART bzw. jeder QG zugrunde. H "erzeugt" üblicherweise die Translationen in der physikalischen Zeit; da H verschwindet, findet keine Zeittranslation statt, das System ist gewissermaßen zeitlos (man darf die physikalische Zeit nicht mit der Koordinatenzeit $t = x^0$ verwechseln; die Wahl von x^0 als Zeit sowie von p^0 als Energie gilt nur für einen speziellen Beobachter).

5.3 Quantenmechanik

Erhaltungssätze werden im Lagrangeformalismus aus Symmetrien der Lagrangefunktion abgeleitet. Im Hamiltonformalismus zeigen sie sich durch eine algebraische Relation (Poisson-Klammer) zwischen der Hamiltonfunktion und der erhaltenen Größe; in der Quantenmechanik entspricht letzteres dem sogenannten Kommutator. Zunächst ist die Zeitentwicklung einer beliebigen Größe (z.B. eine Ladung) q gegeben durch

$$\frac{dq}{dt} = i[H, q] \quad (5.64)$$

Vertauscht nun der Hamiltonoperator H mit q , d.h. $[H, q] = 0$, so ist dieser Gleichung zufolge q konstant, d.h. erhalten. Gemäß dem Noether-Theorem, demzufolge man aus einer Symmetrie der Lagrangefunktion eine erhaltene Ladung konstruieren kann, kann man diese Gleichung wie folgt interpretieren:

Die Quantisierung dieser erhaltenen Ladung liefert einen Operator, den sogenannten Generator der Symmetrietransformation im Raum der quantenmechanischen Zustände. Erhaltene Ladungen und Symmetrietransformationen sind somit eng miteinander verbunden; z.B. generiert der Drehimpulsoperator die Rotationen; aus der Drehimpulserhaltung folgt die Rotationssymmetrie des betrachteten Systems und umgekehrt.

Zum einen besagt die Gleichung demnach, dass H als Generator der Zeitentwicklung die Größe q unverändert lässt, dass also q sowie der Unterraum der Eigenzustände von q invariant unter der Zeittranslationssymmetrie sind. Zum anderen besagt sie auch, dass q als Generator einer Symmetrie wiederum den Hamiltonoperator H unverändert lässt, dass H invariant unter der durch q generierten Symmetrie ist.

6 Energie in der Schleifenquantengravitation

6.1 Einführung

6.2 Formalismus

Hier soll nicht jede Einzelheit der Loop Quantum Gravity diskutiert werden; es werden lediglich die Aspekte vorgestellt, die für die Definition eines verallgemeinerten Energieoperators relevant sind. Ausgangspunkt ist der sogenannte ADM-Formalismus der ECT (s.o.), in dem für die 4d Raumzeit = Riemann-Cartan Mannigfaltigkeit eine Zerlegung in Raum und Zeit, eine sogenannte (3+1)d Blätterung erfolgt. Die Einstein-Cartan-Wirkung wird in neuen Objekten dargestellt; diese neuen Objekte entsprechen intrinsischen Objekten der räumlichen 3d Untermannigfaltigkeit, sowie "äußeren" Objekten, die für die "Zeitentwicklung" dieser 3d Blätterung verantwortlich sind.

An jedem Punkt P der 3d Untermannigfaltigkeit wird durch die Dreibeine e_a^i ein Koordinatensystem auf einem flachen Tangentialraum TM_P aufgespannt. Die Dreibeine tragen dabei sowohl räumliche Indizes $a, b, \dots$ als auch interne $SU(2)$ Indizes $i, j, \dots$, die den Indizes im flachen Tangentialraum entsprechen. Eine räumliche lokale Lorentztransformation entspricht der Freiheit, das durch e_a^i definierte Koordinatensystem in jedem Punkt beliebig wählen zu können. Diese lokale Transformation des Koordinatensystems resultiert dabei in einer $SU(2)$ Drehung des Tangentialraums TM_P , d.h. einer lokalen Eichtransformation!

Mittels des 3d Spin-Zusammenhangs ω_a^i sowie der äußeren Krümmung K_a^i führt man auf der 3d Untermannigfaltigkeit eine Zusammenhangsform

$$A_a^i = \omega_a^i + \gamma K_a^i \quad (6.65)$$

ein. In diesem Sinne ist der hier vorgestellte Formalismus streng äquivalent zur ECT. Die Proportionalitätskonstante γ , der sogenannten Immirzi-Parameter, ist ein freier Parameter, der interessanterweise die klassischen Bewegungsgleichungen nicht modifiziert, jedoch Auswirkung auf das Spektrum quantenmechanischer Operatoren der LQG hat. Eine ähnliche Mehrdeutigkeit ist als θ -Parameter in der QCD bekannt.

Den Dreibeinen e_a^i entsprechen die Co-Dreibeine

$$E_i^a = \gamma^{-1} \det q \, e_i^a \quad (6.66)$$

mit der Metrik q_{ab} auf der 3d Untermannigfaltigkeit.

Die sogenannten Ashtekar Variablen A_a^i und E_i^a stellen zueinander kanonisch konjugierte Felder dar, d.h. im Hamiltonschen Formalismus entsprechen sie den verallgemeinerten Orten bzw. Impulsen. Außerdem entsprechen A_a^i bzw. E_i^a dem $SU(2)$ Vektorpotential sowie der $SU(2)$ Feldstärke. Damit ist die ECT (wegen der Verwendung eines Spin-Zusammenhangs anstelle der vollständig aus der Theorie eliminiert Metrik) in eine eichtheoretische Formulierung mit der Symmetriegruppe $SU(2)$ überführt.

Nun definiert man noch die intrinsische Krümmung

$$F = dA + A \wedge A \quad (6.67)$$

Man erhält aus der (umformulierten) Einstein-Cartan-Wirkung für die Funktionen

$$G_i = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ikl} A_a^k E_l^b \quad (6.68)$$

$$D_a = F_{ab}^i E_i^b \quad (6.69)$$

$$H = \frac{\epsilon_{ikl} F_{ab}^i E_k^a E_l^b}{\sqrt{\det E}} + \dots \quad (6.70)$$

nach der Quantisierung drei Operatoren bzw. Constraints an die physikalischen Zustände

$$G_i | \text{phys} \rangle = 0 \quad (6.71)$$

$$D_a | \text{phys} \rangle = 0 \quad (6.72)$$

$$H | \text{phys} \rangle = 0 \quad (6.73)$$

Die erste Gleichung entspricht der $SU(2)$ Version des Gaußschen Constraints und zeigt die Invarianz unter lokalen $SU(2)$ Eichtransformationen, also Drehungen der e bzw. E auf dem Tangentialraum TM_P

Die zweite Gleichung entspricht dem Diffeomorphismus-Constraint, d.h. der lokalen Invarianz unter beliebigen Koordinatentransformationen auf der 3d Untermannigfaltigkeit.

Die dritte Gleichung entspricht dem Hamiltonschen-Constraint, d.h. sie garantiert, dass die beiden ersten Constraints auch bei der "Zeitentwicklung" senkrecht zur 3d Untermannigfaltigkeit respektiert werden. Diese letzte Gleichung entspricht dem oben diskutierten Verschwinden der Hamiltonfunktion für das relativistische Teilchen.

Die entsprechenden Operatoren sind nicht identisch Null, sie definieren lediglich einen physikalischen Unterraum innerhalb des sogenannten kinematischen Hilbertraumes. Ein einfacher Fall in der Quantenmechanik ist die Separation des Hamiltonoperators eines Zwei-Körper-Problems in einen Anteil mit Relativimpuls p sowie Schwerpunktsimpuls P . Die Implementierung der Translationsinvarianz auf dem vollen Hilbertraum

$$|\psi\rangle = |p, P\rangle \quad (6.74)$$

entspricht der Selektion eines Unterraumes mit verschwindendem Schwerpunktsimpuls

$$\hat{P} | \text{phys} \rangle = P | p, P \rangle = 0 \quad (6.75)$$

also

$$| \text{phys} \rangle = | p, 0 \rangle \quad (6.76)$$

Die Quantisierung eines derartigen Systems mit Constraints ist seit Dirac prinzipiell verstanden. Im Rahmen der LQG bereitet zunächst noch die Definition der quantenfeldtheoretischen Operatoren Probleme, da diese nicht direkt als operatorwertige Distributionen (verallgemeinerte Funktionen) verstanden werden dürfen, sondern über ausgedehnte geometrische Objekte "regularisiert" werden müssen.

Man betrachtet dazu für infinitesimale Flächen S sowie die jeweilige Berandungen = Schleifen ∂S zum einen ein matrix-wertiges, pfadgeordnetes Schleifenintegral (daher der Name Schleifenquantengravitation)

$$h[S] = P \exp \int_{\partial S} ds A \quad (6.77)$$

sowie zum anderen ein ebenfalls matrix-wertiges Flächenintegral über die von ∂S berandete Fläche S

$$E[S, f] = \int_S dS_a E_i^a f^i \quad (6.78)$$

wobei f^i beliebige Testfunktionen sind. $h[S]$ entspricht im Wesentlichen einer Ringspannung entlang ∂S , $E[S, f]$ dem elektrischen Fluss durch die Fläche S .

Diese neuen Objekte $h[S]$ und $E[S, f]$ dienen zur Konstruktion des Hilbertraumes sowie der Operatoren in der LQG. Man erreicht die Implementierung der Constraints G_i und D_a mittels der Wahl geeigneter Repräsentanten ∂S_0 aus dem Raum aller möglichen Schleifen ∂S . Diese Repräsentanten führen auf sogenannte Spin-Netzwerke: die “Werte” von $h[S]$ sowie $E[S, f]$ sind unabhängig von der genauen Form der gewählten Kurve ∂S . Die Invarianz bzgl. der Deformationen von S bzw. der Einbettung in die 3d Untermannigfaltigkeit entspricht der Diffeomorphismen-Invarianz der Theorie. Demzufolge wählt man als Repräsentanten (aus einer Klasse von Kurven) einen festen Graph in der 3d Untermannigfaltigkeit. Ein Vertex des Graphen repräsentiert dabei eine “Volumenzelle” der 3d Untermannigfaltigkeit, ein Link des Graphen zwischen zwei Vertices entspricht der Fläche, die die beiden Volumenzellen voneinander trennt. Ein Link trägt einen $SU(2)$ Spin, ein Vertex einen $SU(2)$ Operator (sog. Intertwiner).

6.3 Status und Probleme der Schleifenquantengravitation

Nach der Quantisierung der Theorie ist die Raumzeit als solche vollständig eliminiert! Lediglich die Spinnetzwerke sowie die Operatoren existieren noch als rein algebraische Objekte. Insbs. leben die o.g. Vertices und Links nicht mehr “in” der Raumzeit, sie “sind” die Raumzeit. Der Vakuumzustand der LQG entspricht keinesfalls “leerem Raum”, sondern vielmehr “keinem Raum”. Die Rekonstruktion einer kontinuierlichen, makroskopischen Raumzeit aus diesen diskreten Objekten (in einem geeigneten semi-klassischen Limes) stellt ggw. ein zentrales Forschungsgebiet der LQG dar.

Man beachte, dass die oben diskutierte Quantisierung einer Vorgehensweise in der QM entspricht, in der nicht mehr der Ortsoperator selbst sondern lediglich eine geeignete (unitäre) Exponentialfunktion desselben definiert wird. Diese sogenannte Polymer-Quantisierung ist nicht unitär-äquivalent zur Standard-Quantisierung und führt somit explizit zu unterschiedlichen Operatoralgebren und einem neuen Hilbertraum. Sie ist letztlich der Grund, warum die LQG überhaupt qualitativ neue Ergebnisse liefern kann.

Eine wesentliche Erkenntnis der LQG ist, dass die Spinnetzwerke zu einer physikalischen Diskretisierung führen, da insbs. der Flächenoperator

$$\text{Ar}[S] = \int dS |E| \quad (6.79)$$

$$\text{Ar}[S]|j\rangle = a_j|j\rangle \quad (6.80)$$

$$(6.81)$$

quantisierte Eigenwerte der j -Darstellung der $SU(2)$

$$a_j = 8\pi\gamma\ell_P^2\sqrt{j(j+1)} \quad (6.82)$$

liefert, wobei γ wieder für den Immirzi-Parameter steht, der somit explizit in die Spektren der Operatoren eingeht. Der Spin j kann dabei die Werte $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ entsprechend der Darstellungen der $SU(2)$ annehmen.

Wesentliche Fortschritte der LQG sind ihre Verwandtschaft zu Eichtheorien, die vergleichsweise einfache Form der geometrischen Objekte, die vollständige und mathematisch konsistente Konstruktion eines kinematischen Hilbertraumes sowie die Konstruktion und Implementierung der Constraints G_i und D_a . Insbs. die hintergrundunabhängige, nicht-störungstheoretische Formulierung ist hervorzuheben.

Dem stehen jedoch auch einige ungelöste mathematische Probleme gegenüber: diese stammen im Wesentlichen aus der (nicht eindeutigen) Wahl der Regularisierung der Operatoren $h[S]$ und $E[S, f]$ für infinitesimale Schleifen $\partial S \rightarrow 0$ sowie aus der nicht-eindeutigen Einbettung des o.g. Graphen in die 3d Untermannigfaltigkeit. Außerdem erzeugt der Hamiltonoperator neue Vertices und Links im Graphen, für die jedoch kein eindeutiges Prinzip zur Zuordnung zu einer bestimmten j -Darstellung der $SU(2)$ bekannt ist. Daraus resultiert insgs. ein nicht eindeutig definierter Hamiltonoperator H und somit eine Mehrdeutigkeiten in der Dynamik der Theorie! Dieser Punkt hängt wohl eng mit der Tatsache zusammen, dass bis heute keine exakte oder semiklassische Rekonstruktion der makroskopischen Raumzeit gelungen ist.

Ein strittiger Punkt ist eine mögliche Anomalie der Constraints. Aus der klassischen Betrachtung stammt die Forderung, dass die Constraints eine Operator-Algebra erfüllen müssen; man bezeichnet dies als off-shell closure. In der LQG tritt jedoch der Fall auf, dass diese Algebra nur auf dem Unterraum der physikalischen Zustände schließt, sogenannte on-shell closure. Möglicherweise deutet dies auf eine Quantisierungsanomalie und somit

letztlich auf die Inkonsistenz der Theorie hin, denn üblicherweise fordert man off-shell closure, d.h. Eichinvarianz und Diffeomorphismen-Invarianz auf dem gesamten Hilbertraum, nicht nur im physikalischen Sektor.

In gewisser Weise erscheint die LQG also noch nicht abgeschlossen. Es zeigt sich, dass die zur Ableitung der LQG verwendeten Objekte wie die 3d Untermannigfaltigkeit sowie die Felder A_a^i und E_i^a nach der vollzogenen Quantisierung keine mathematische Entsprechung mehr haben, d.h. die Theorie entzieht sich quasi selbst den Boden.

6.4 Zur nicht-Eindeutigkeit der Quantisierung

Ein paar generelle Anmerkungen zur Problematik der Quantisierung einer klassischen Theorie sind angebracht: die Quantisierung kann generell nicht eindeutig sein, da aus der klassischen Theorie (die lediglich eine Näherung an die exakte quantisierte Theorie darstellt) das exakte Urbild rekonstruiert werden soll. Man vergleiche dies mit der "Rekonstruktion" eines Gebäudes aus einem (mehr oder weniger exakten) Bauplan.

Dabei kommen bestimmte Regeln und mathematische Formalismen zum Einsatz (Konstruktion des Hilbertraumes, der darauf wirkenden Operatoren nach dem Korrespondenzprinzip aus den klassischen Feldern etc.) sowie einige generelle Bedingungen an die quantisierte Theorie (Realisierung der klassischen Symmetrien als unitäre Transformationen, Anomaliefreiheit = vollständige Gültigkeit der Symmetrien auf dem Hilbertraum).

Auf diesem Weg der Quantisierung einer klassischen Theorie treten häufig Mehrdeutigkeiten, z.B. bei der Konstruktion des Hilbertraumes sowie der Eigenschaften der darauf definierten Operatoren (bzgl. Definitionsbereich, Konvergenz etc.), die Regularisierung der Divergenzen einer Theorie (unter Beibehaltung der wesentlichen Symmetrien), die Wahl einer Darstellung einer Symmetrie. Bei diesen Unklarheiten hilft die Betrachtung des semi-klassischen Grenzfalles nicht, da im zugrundeliegenden Limes $\hbar \rightarrow 0$ zunächst inäquivalente Theorien denselben klassischen Limes haben können.

Demzufolge hat die Quantisierung bzw. generell die Konstruktion einer physikalischen Theorie zwei wesentlichen Prinzipien zu gehorchen: 1) mathematische Strenge und Konsistenz sowie möglichst mathematische Eindeutigkeit bzw. Einfachheit; 2) Falsifizierbarkeit aufgrund physikalischer Vorhersagen und Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

Im Falle der LQG trifft man nun alle diese mathematischen Schwierigkeiten an: die Konstruktion des Hilbertraum führt zunächst auf einen nicht-separablen Hilbertraum, was nicht direkt falsch, aber im Formalismus der Quantentheorie doch ungewöhnlich ist. Die Konstruktion der Schleifenvariablen ist zur üblichen Konstruktion nicht unitär äquivalent, was dazu führt, dass die ursprünglichen Operatoren A_a^i und E_i^a nur noch in einem bestimmten Limes $\partial S \rightarrow 0$ über $h[S]$ und $E[S, f]$ definiert und ultra-lokal konvergent sind: dies führt unmittelbar zur oben diskutierten on-shell closure (statt off-shell closure) und der Tatsache, dass die Frage nach Anomaliefreiheit im strengen Sinne nicht beantwortbar ist. Die Wahlfreiheit der Darstellungen der Symmetrie erkennt man bei der Konstruktion des Hamiltonoperators; ein vergleichbares Beispiel ist die Konstruktion der Schrödingergleichung für Teilchen mit Spin in der Quantenmechanik. Hier entscheidet das Experiment, dass Elektronen Spin 1/2 tragen, die Theorie lässt grundsätzlich jede Darstellung der $SU(2)$ Symmetriegruppe zu. Zuletzt stellt die Konsistenzprüfung des klassischen Grenzfalles ein Problem dar, da es im Rahmen der LQG noch nicht gelungen ist, eine semiklassische Näherung zu konstruieren, die alle Gleichungen der Theorie (näherungsweise) erfüllt und die in einem geeigneten Sinne einem flachen Minkowski-Raum (oder einer bekannten kosmologischen Lösung der ART) entspricht.

Da nun das zweite Prinzip der Falsifizierbarkeit und die direkte Übereinstimmung mit dem Experiment in der Quantengravitation zumindest momentan kaum erfüllbar ist, muss insbs. Wert auf das erste Prinzip, d.h. die mathematische Strenge gelegt werden. Daher sind viele Fortschritte eher im axiomatischen Bereich und weniger in den physikalischen Vorhersagen zu erwarten. Dies unterscheidet die Konstruktion einer Quantengravitationstheorie grundlegend von der Konstruktion der bisher untersuchten Quantenfeldtheorien, in denen die wesentlichen Inputs von den Experimenten kamen, und ist somit nicht der LQG alleine sondern grundsätzlich allen Zugängen zur Quantengravitation anzulasten.

6.5 Die Energie in der Schleifenquantengravitation

Sowohl im Rahmen einer kovarianten Formulierung der ECT als auch gemäß dem ADM-Formalismus gilt der hamiltonsche Constraint

$$H|\text{phys}\rangle = 0 \quad (6.83)$$

d.h. der Hamiltonoperator H verschwindet identisch auf dem Raum der physikalischen Zustände und erlaubt somit keine direkte Interpretation als Energieoperator. Dies entspricht dem oben diskutierten Fall des relativistischen Teilchens. Somit ist also auch im Rahmen der LQG eine alternative Konstruktion einer (erhaltenen) Energie notwendig.

Ausgangspunkt dafür sind die bereits vorgestellten Ansätze zur nicht-lokalen Energie, die sich über die gravitative Wirkung eines abgeschlossenen Raumgebietes bzw. über ein entsprechendes Oberflächenintegral dargestellt werden kann. Die klassischen Ausdrücke müssen mittels der Ashtekar-Variablen A_a^i und E_i^a bzw. die regularisierten Größen $h[S]$ und $E[S, f]$ definiert werden; diese sind dann letztlich durch die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren zu ersetzen.

Zunächst soll die Bedeutung des Hamiltonians H als Generator einer zeitartigen Symmetrietransformation diskutiert werden. Man betrachtet dazu die von den Testfunktionen f abhängige Schar von Operatoren

$$H[f] = \int dV H f \quad (6.84)$$

Daraus konstruiert man gemäß

$$U[f] = \exp i \int dV H f \quad (6.85)$$

die unitären Operatoren $U[f]$, die einer Symmetrie der physikalischen Zustände entsprechen; wegen

$$H|\text{phys}\rangle = 0 \quad (6.86)$$

gilt

$$U[f]|\text{phys}\rangle = \text{id}|\text{phys}\rangle \quad (6.87)$$

Die Einführung eines berandeten Volumens V mit ∂V bricht nun die ursprüngliche Diffeomorphismeninvarianz der Theorie. Man betrachte dazu einen beliebigen Diffeomorphismus; dieser kann in zwei Anteile zerlegt werden, wobei ein Anteil die Oberfläche ∂V invariant lässt (z.B. lassen Drehungen eine Kugeloberfläche S^2 invariant), während der andere Anteil ∂V deformiert. Der zweite Anteil führt zu neuen physikalischen Freiheitsgraden, die lediglich auf der Oberfläche ∂V existieren und deren Deformation beschreiben (man kennt ähnliche Effekte bei der Einführung von Grenzflächen in flüssigen Medien, z.B. bei der Oberflächenspannung von Wasser).

Demzufolge lässt sich aus H eine durch f parametrisierte Schar von Observablen, d.h. prinzipiell messbaren quantenmechanischen Operatoren, definieren, die nicht mehr auf den physikalischen Zuständen verschwinden:

$$O_V[f] = \int dV H f \quad (6.88)$$

Man findet, dass diese Form klassisch äquivalent zu der oben diskutierten Form der nicht-lokalen "Energie"

$$M[V, f] \sim \int dV k f \quad (6.89)$$

ist und einen guten Kandidaten für die Definition eines Energieoperators im Rahmen der LQG darstellt. Somit lässt sich im Rahmen der LQG zwar kein eindeutiger Energieoperator auf Basis fundamentalen Prinzipien definieren, allerdings erhält man aus der Schar von Operatoren $O[f]$ messbare Größen analog zu einer "klassischen Energie".

6.6 Die Entropie in der Schleifenquantengravitation

Die Idee bzgl. der Thermodynamik Schwarzer Löcher, d.h. der Definition einer Temperatur $T[\bar{A}]$ und einer Entropie $S[\bar{A}]$ für gegebene Horizontfläche $\bar{A}$ ist im Wesentlichen folgende: aufgrund quantenfeldtheoretischer Vakuumfluktuationen entstehen im Inneren des Horizontes virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare; die quantenmechanische Unschärfe des Horizontes erlaubt es (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) jeweils einem virtuelles

Teilchen oder Antiteilchen den Horizont zu durchtunneln, d.h. im Außenraum als reales Teilchen sichtbar zu werden. Die Ursache dieser Strahlung kann gemäß Hawkings semiklassischer Näherung letztlich auf die Definition des Vakuumzustandes der Quantenfeldtheorie in gekrümmten, jedoch klassischen = nicht-quantisierten Raumzeiten sowie die Existenz eines Horizontes zurückgeführt werden. Die Teilchen weisen (im asymptotisch räumlich Unendlichen) ein thermisches Spektrum auf, d.h. der Strahlung und somit dem Schwarzen Loch kann gemäß des Planckschen Strahlungsgesetzes eine Temperatur zugeschrieben werden kann.

Den Regeln der Thermodynamik folgend leiteten Hawking und Bekenstein die Existenz einer entsprechenden Entropie ab, für die gemäß der statistischen Mechanik die Mikrozustände des Schwarzen Lochs verantwortlich sein müssten. Diese kann die semiklassische Betrachtung Hawkings allerdings nicht liefern, da sie ja gerade die quantenmechanischen Mikrozustände des Gravitationsfeldes vernachlässigt.

Zusammenfassend erhält man unter Benutzung der Oberflächengravitation κ für die semiklassischen thermodynamischen Eigenschaften Schwarzer Löcher:

$$T^0 = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (6.90)$$

$$S^0 = \frac{\bar{A}}{4} \quad (6.91)$$

sowie speziell für die Schwarzschild-Lösung

$$T_{\text{Schwarzschild}}^0 = \frac{1}{8\pi Gm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\bar{A}}} \quad (6.92)$$

Im Folgenden wird sich zeigen, dass in der LQG die Fläche des Schwarzen Loches (anstelle der Masse wie in der klassischen Theorie) die zentrale Rolle spielt, da der explizit konstruierbarer Flächenoperator $\text{Ar}[S]$ mit seinen Eigenwerten

$$a_j = 8\pi\gamma\ell_P^2\sqrt{j(j+1)} \quad (6.93)$$

im Raum der Spinnetzwerke zur Verfügung steht.

Zur Identifizierung der Mikrozustände zerlegt man die Horizontfläche $\bar{A}$ in elementare Zellen, jede davon mit der Planckfläche ℓ_P^2 , wobei jede Zelle mögliche quantenmechanische Mikrozustände entsprechend der $SU(2)$ Spinfreiheitsgrade repräsentiert. Die Gesamtzahl der Zustände des Horizontes $N[\bar{A}]$ ist gegeben durch

$$N[\bar{A}] = 2^{n[\bar{A}]} \quad (6.94)$$

mit der Anzahl der Zellen

$$n[\bar{A}] = \frac{\bar{A}}{\ell_P^2} \quad (6.95)$$

Die Entropie $S[\bar{A}]$ entspricht dem Logarithmus der Anzahl der Mikrozustände

$$S[\bar{A}] = \ln N[\bar{A}] \quad (6.96)$$

Die exakte Abzählung der Zustände $N[\bar{A}]$ des Spinnetzwerkes liefert Quantenkorrekturen zur semiklassischen Abschätzung $S^0 = n/4$; einschließlich der ersten Ordnung, d.h. für makroskopische Schwarze Löcher unter Vernachlässigung höherer Quantenkorrekturen, gilt

$$S[\bar{A}] = \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \ln n + \dots \quad (6.97)$$

Außerdem ergeben sich weitere Quantenkorrekturen dahingehend, dass dem rein thermischen Spektrum aufgrund der Diskretisierung durch die Spinnetzwerke sowie deren quantenmechanische Entartung (viele ununterscheidbare Mikrozustände tragen zum selben Makrozustand eines Schwarzen Loches bei) ein "verbreitertes Linienspektrum" überlagert ist (die Ergebnisse dazu sind jedoch nicht einheitlich).

Die Quantisierungsmehrdeutigkeit des Immirzi-Parameters γ wurde durch Forderung nach Übereinstimmung in führender Ordnung mit dem semiklassischen Ergebnis von Bekenstein-Hawking fixiert. Diese Festlegung erscheint zunächst willkürlich, ist jedoch zumindest dahingehend robust, dass sie auch für deformierte Schwarze Löcher ggf. mit nichtverschwindendem Drehimpuls in führender Ordnung immer die Koeffizienten von Hawkings Ergebnis reproduziert, d.h. dass eine einheitliche Festlegung von γ unabhängig von einer speziellen Problemstellung möglich ist.

Im Gegensatz zu einer rein klassischen Abschätzung ergeben sich aus der LQG neue Eigenschaften: so trägt jeder den Horizont durchstoßende Link des Spinnetzwerkes ein oben angegeben Flächenquant a_j . Die Fläche des Horizontes ergibt sich damit als Summe über derartige Flächenquanten für alle den Horizont durchstoßenden Links. Außerdem tragen die elementaren Zellen der Fläche ℓ_P^2 nicht wie klassisch erwartet 2 sondern entsprechend der Dimension der j -Darstellung $(2j+1)$ Mikrozustände zu verschiedenem $j_3 = -j, -j+1, \dots, +j$ bei. Für die Berechnung der o.g. Entropie werden dabei alle Mikrozustände sowie der Entartungsgrad der Spinnetzwerke betrachtet, die zu einem Makrozustand bei vorgegebener Fläche $\bar{A}$ beitragen. Dies führt letztlich zu den o.g. Quantenkorrekturen (die Details dieser Berechnung sollen hier nicht dargestellt werden).

Die quantenmechanische Beschreibung des Horizontes induziert aufgrund der Randbedingungen (Stichwort: "isolated horizon") eine Separierung des Hilbertraumes in Oberflächen- bzw. Volumenanteil und somit zusätzliche Oberflächenfreiheitsgrade, die den Durchdringungspunkten der Links entsprechen; dies entspricht eine $(2+1)$ dimensional!) Chern-Simons Eichtheorie auf dem Horizont; die teilweise Fixierung der $SU(2)$ Eichsymmetrie im Volumen induziert letztlich die $U(1)$ Eichsymmetrie der Chern-Simons Theorie auf der Oberfläche

$$S = S_{\text{ECT}}[A] + S_{\text{CS}}[a] \quad (6.98)$$

mit den zweidimensionalen Eichfeldern $a = A_{\partial V}$ und

$$S_{\text{CS}}[a] = \frac{k}{4\pi} \int_{\partial V} \text{tr} \left[a \wedge da + \frac{2}{3} a \wedge a \wedge a \right] \quad (6.99)$$

Die Quantisierung dieser Theorie führt auf eine Diskretisierung der zunächst kontinuierlichen Eichsymmetrie. Der numerische Faktor

$$k = \frac{\bar{A}}{4\pi G\gamma} \quad (6.100)$$

entspricht dabei dem sog. Level der Chern-Simons Theorie.

Zunächst sind die Spinnetzwerke einerseits sowie die Quantisierung der Chern-Simons Theorie andererseits unabhängig voneinander, allerdings führt die Implementierung der Randbedingung auf dem Horizont zu einer Eins-zu-Eins Entsprechung von Operatoren der LQG mit solchen der Chern-Simons Theorie; insbs. stimmt die Abzählung der quantenmechanischen Oberflächenfreiheitsgrade und somit die Entropie in beiden Theorien exakt überein! Dies ist umso interessanter, als die Einführung des Horizontes bereits in der klassischen Theorie = vor der Quantisierung erfolgt; diese Näherung wird dadurch im Nachhinein gerechtfertigt.

Das Auftreten dieser Oberflächenfreiheitsgrade ist die zentrale Ursache für die Skalierung der Entropie des schwarzen Lochs mit der Oberfläche $\bar{A}$ (anstelle des klassisch erwarteten Volumens); dies entspricht dem bereits angesprochenen holographischen Prinzip, demzufolge die Dynamik eines Raumbereiches einer niederdimensionalen, auf der Oberfläche definierten Theorie, äquivalent ist.

7 Fragen zur Energie in der Quantengravitation

Über die bereits in der klassischen Theorie auftretenden Fragestellungen existieren im Formalismus der Schleifenquantengravitation bezüglich der Definition eines Energieoperators folgende wesentliche offene Punkte:

- a) Existiert ein eindeutiges Quantisierungsprinzip bzgl. Konstruktion und Regularisierung einer anomalienfreien Operatoralgebra, insbs. bzgl. des Hamiltonoperators?
- b) Existiert ein physikalisches Prinzip, dass die eindeutige Fixierung des Immirzi-Parameters ohne Rückgriff auf die semiklassischen Ergebnisse von Hawking und Bekenstein zulässt?

- c) Lässt sich aus einer (physikalisch eindeutig festgelegten) klassischen Konstruktion ein eindeutiger Energieoperator konstruieren? D.h. existiert eine Observable, die Spinnetzwerkzuständen eine Energie zuordnet, wobei wesentliche physikalische Prinzipien (Energieerhaltung, Lorentz-Kovarianz, Positivität, verschwindende Energie im flachen Raum, korrekter semiklassischer Limes, ...) berücksichtigt werden?
- d) Kann dieser Energieoperator geeignet "lokalisiert" werden, d.h. ist es möglich, den Begriff einer geschlossenen Fläche und insbs. eines Horizontes exakt im Rahmen der LQG zu definieren, ohne dazu auf eine klassische Definition zurückgreifen zu müssen? e) weitere offenen Punkte dürften sich aus der Diskussion ergeben ...

8 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von der Problematik der Definition einer (erhaltenen) Energie im Rahmen der ART wurden mehrere verwandte und teilweise erweiterte Fragestellungen untersucht. Ausgehend von der Forderung, dass ein vernünftiger Energiebegriff immer auch die Beiträge des Gravitationsfeldes (insbs. von Gravitationswellen) enthalten muss, wurden sowohl pseudo-tensorielle als auch nicht-lokale Ansätze untersucht. Letztere spielen eine wesentliche Rolle im Rahmen des kanonischen Formalismus (ursprünglich: ADM-Formalismus); sie sind jedoch nicht eindeutig aus einem fundamentalen Prinzip ableitbar und lassen eine Reihe von nicht-äquivalenten Versionen zu.

Im Rahmen der Einstein-Cartan-Theorie wurde die Problematik der Nicht-Erhaltung des (lokalen) Energie-Impuls-Tensors diskutiert. Ursache der Probleme ist im Wesentlichen die durch die Kopplung an die Spindichte nicht-verschwindende Torsion, die zu einer Anomalie der Kontinuitätsgleichung führt.

Die kanonische Quantisierung der Einstein-Cartan-Theorie führt auf die sogenannte Schleifenquantengravitation sowie auf Spinnetzwerke. Hier liegt es nahe, aufgrund des kanonischen Formalismus den Energiebegriff aus einem Hamiltonoperator abzuleiten. Die zentrale Schwierigkeit des Verschwindens des Hamilton-Constraints im Raum der physikalischen Zustände kann dadurch umgangen werden, dass für lokalisierte Konfigurationen geeignete Oberflächenterme zum Hamiltonoperator konstruiert werden. In Spezialfällen lässt sich die Äquivalenz zu den o.g. nicht-lokalen Definitionen zeigen. Die wesentliche Schwäche der Schleifenquantengravitation, d.h. insbs. die Definition anomalfreier Constraints als Operatoralgebra auf dem Raum physikalischer Zustände sowie die Quantisierungsmehrdeutigkeit des Immirzi-Parameters schlagen sich auch bei Definition eines Energieoperators nieder.

Zuletzt wurde die konkrete Anwendung der LQG auf die Theorie Schwarzer Löcher präsentiert. Dabei zeigt sich, dass der Begriff der Masse durch die Existenz eines Horizontes sowie die Konstruktion eines Flächenoperators ersetzt werden kann, dass also die Dynamik des exakten Hamiltonoperator sowie ein daraus konstruierter Energieoperator nicht zwingend erforderlich ist, um wesentliche Eigenschaften und insbs. Quantenkorrekturen abzuleiten.

9 Literatur

<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2009-4/>

Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in General Relativity

László B. Szabados, Research Institute for Particle and Nuclear Physics

Abstract: The present status of the quasi-local mass, energy-momentum and angular-momentum constructions in general relativity is reviewed. First, the general ideas, concepts, and strategies, as well as the necessary tools to construct and analyze the quasi-local quantities, are recalled. Then, the various specific constructions and their properties (both successes and deficiencies) are discussed. Finally, some of the (actual and potential) applications of the quasi-local concepts and specific constructions are briefly mentioned.

<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2008-5/>

Loop Quantum Gravity

Carlo Rovelli, Centre de Physique Theorique, Marseille

Abstract: The problem of describing the quantum behavior of gravity, and thus understanding quantum space-time, is still open. Loop quantum gravity is a well-developed approach to this problem. It is a mathematically well-defined background-independent quantization of general relativity, with its conventional matter couplings. Today research in loop quantum gravity forms a vast area, ranging from mathematical foundations to physical applications. Among the most significant results obtained so far are: (i) The computation of the spectra

of geometrical quantities such as area and volume, which yield tentative quantitative predictions for Planck-scale physics. (ii) A physical picture of the microstructure of quantum spacetime, characterized by Planck-scale discreteness. Discreteness emerges as a standard quantum effect from the discrete spectra, and provides a mathematical realization of Wheeler's spacetime foam intuition. (iii) Control of spacetime singularities, such as those in the interior of black holes and the cosmological one. This, in particular, has opened up the possibility of a theoretical investigation into the very early universe and the spacetime regions beyond the Big Bang. (iv) A derivation of the Bekenstein-Hawking black-hole entropy. (v) Low-energy calculations, yielding n -point functions well defined in a background-independent context. The theory is at the roots of, or strictly related to, a number of formalisms that have been developed for describing background-independent quantum field theory, such as spin foams, group field theory, causal spin networks, and others. I give here a general overview of ideas, techniques, results and open problems of this candidate theory of quantum gravity, and a guide to the relevant literature.

<http://arxiv.org/abs/0903.3982>

Quasilocal Energy in FRW Cosmology

M. M. Afshar

(Submitted on 23 Mar 2009 (v1), last revised 3 Oct 2009 (this version, v2))

Abstract: This paper presents a calculation of the quasilocal energy of a generic FRW model of the universe. The results have the correct behavior in the small-sphere limit and vanish for the empty Milne universe. Higher order corrections are found when comparing these results to classical calculations of cosmological energy. This case is different from others in the literature chiefly in that it involves a non-stationary spacetime. This fact can be used to differentiate between the various formulations of quasilocal energy. In particular, the formulation due to Brown and York is compared to that of Epp. Only one of these is seen to have the correct classical limit.

<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0606062>

Einstein-Cartan Theory

Andrzej Trautman

(Submitted on 14 Jun 2006)

Abstract: The Einstein–Cartan Theory (ECT) of gravity is a modification of General Relativity Theory (GRT), allowing space-time to have torsion, in addition to curvature, and relating torsion to the density of intrinsic angular momentum. This modification was put forward in 1922 by Elie Cartan, before the discovery of spin. Cartan was influenced by the work of the Cosserat brothers (1909), who considered besides an (asymmetric) force stress tensor also a moments stress tensor in a suitably generalized continuous medium.

<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0210094v1>

Lectures on Loop Quantum Gravity

Thomas Thiemann

(Submitted on 28 Oct 2002) Abstract: Quantum General Relativity (QGR), sometimes called Loop Quantum Gravity, has matured over the past fifteen years to a mathematically rigorous candidate quantum field theory of the gravitational field. The features that distinguish it from other quantum gravity theories are 1) background independence and 2) minimality of structures. Background independence means that this is a non-perturbative approach in which one does not perturb around a given, distinguished, classical background metric, rather arbitrary fluctuations are allowed, thus precisely encoding the quantum version of Einstein's radical perception that gravity is geometry. Minimality here means that one explores the logical consequences of bringing together the two fundamental principles of modern physics, namely general covariance and quantum theory, without adding any experimentally unverified additional structures. The approach is purposely conservative in order to systematically derive which basic principles of physics have to be given up and must be replaced by more fundamental ones. QGR unifies all presently known interactions in a new sense by quantum mechanically implementing their common symmetry group, the four-dimensional diffeomorphism group, which is almost completely broken in perturbative approaches. These lectures offer a problem – supported introduction to the subject.

<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0409061>

Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams

Alejandro Perez

(Submitted on 15 Sep 2004 (v1), last revised 9 Feb 2005 (this version, v3))

Abstract: These notes are a didactic overview of the non perturbative and background independent approach to a quantum theory of gravity known as loop quantum gravity. The definition of real connection variables for general relativity, used as a starting point in the program, is described in a simple manner. The main ideas leading to the definition of the quantum theory are naturally introduced and the basic mathematics involved is described. The main predictions of the theory such as the discovery of Planck scale discreteness of geometry and the computation of black hole entropy are reviewed. The quantization and solution of the constraints is explained

by drawing analogies with simpler systems. Difficulties associated with the quantization of the scalar constraint are discussed. In a second part of the notes, the basic ideas behind the spin foam approach are presented in detail for the simple solvable case of 2+1 gravity. Some results and ideas for four dimensional spin foams are reviewed.

<http://arxiv.org/abs/hep-th/0601129>

Loop and spin foam quantum gravity: a brief guide for beginners

Hermann Nicolai, Kasper Peeters

(Submitted on 18 Jan 2006 (v1), last revised 16 Feb 2006 (this version, v2))

Abstract: We review aspects of loop quantum gravity and spin foam models at an introductory level, with special attention to questions frequently asked by non-specialists.

<http://arxiv.org/abs/0812.3554v2>

Quasi-Local Energy in Loop Quantum Gravity

Jinsong Yang, Yongge Ma

(Submitted on 18 Dec 2008 (v1), last revised 4 Jan 2009 (this version, v2))

Abstract: Although there is no known meaningful notion of the energy density of the gravitational field in general relativity, a few notions of quasi-local energy of gravity associated to extended but finite domains have been proposed. In this paper, the notions of quasi-local energy are studied in the framework of loop quantum gravity, in order to see whether these notions can be carried out at quantum level. Two basic quasi-local geometric quantities are quantized, which lead to well-defined operators in the kinematical Hilbert space of loop quantum gravity. We then use them as basic building blocks to construct different versions of quasi-local energy operators. The operators corresponding to Brown-York energy, Liu-Yau energy, Hawking energy, and Geroch energy are obtained respectively. The virtue of the Geroch energy operator is beneficial for us to derive a rather general entropy-area relation and thus a holographic principle from loop quantum gravity.