1 Gesamtdrehimpluserhaltung eines Systems mit N Massenpunkten

(Gewidmet: „Namenl0s“)

1.1 Begriffserklärung

Also $\vec{r_\nu}(t)$ ist die Bahnkurve des ν-ten Massenpunktes mit der Masse m_ν und es wirkt auf ihn die Kraft $\vec{F_\nu}$
Es gilt für jeden Massenpunkt das 2te Newton'sche Axiom:

$$m_\nu \ddot{\vec{r_\nu}}(t) = \vec{F_\nu}$$

Wir spalten nun diese Kraft in äußere Kräfte $\vec{F_\nu^{(a)}}$ und der Kraft die zwischen dem ν-ten Teilchens und dem μ ten Teilchens wirkt: $\vec{F_{\nu\mu}}$

1.2 Drehimpulserhaltung

Um nun zur Drehimpulerhaltung zu gelangen multiplizieren wir $\vec{r}_{nu}$ vektoriell mit der Bewegungsleichung und summieren über ν:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu$$

Dies wandeln wir um indem wir links die Ableitung herrausziehen und rechts wieder in äußere und innere Kräfte aufspalten:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F_\nu^{(a)}} + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \sum_{\mu,\mu\neq\nu}^{N} \vec{F_{\nu\mu}}$$

Definition, wir definieren den Gesamtdrehimpuls als:

$$\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{L}_\nu$$

So jetzt betrachten wir noch etwas den Term mit $\vec{F_{\nu\mu}}$. Zur Erinnerung das 3 Axiom samt der zwei Zusätze: $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$, Zusatz 1: $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{1,2} = 0$, Zusatz 2: $\vec{F} = \sum_\nu \vec{F}_\nu$ Somit:

$$\sum_{\mu,\nu,\mu\neq\nu}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F_{\nu\mu}} \overset{\nu\leftrightarrow\mu}{=} \sum_{\nu,\mu,\nu\neq\mu}^{N} \vec{r}_\mu \times \vec{F_{\mu\nu}} \overset{\text{3Axiom}}{=} - \sum_{\nu,\mu,\nu\neq\mu}^{N} \vec{r}_\mu \times \vec{F_{\mu\nu}}$$

Mit Hilfe des 1 Zusatzes erhalten wir

$$\sum_{\mu,\nu,\mu\neq\nu}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F_{\nu\mu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu,\mu\neq\nu}^{N} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{F}_{\nu\mu} \overset{\text{1Zusatz}}{=} 0$$

1.2.1 Drehmoment und Drehimpulserhaltung

Somit haben wir unser gewünschtes Endresultat:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(a)} = \vec{M}$$

Wir sehen nun, dass wenn keine äußeren Kräfte auf das System von Massenpunkten wirkt (z.b.: Die Erde mit viele Massenpunkten darauf - inklusive ihr selbst) gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{0} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = Konstant$$

Der Gesamtdrehimpuls bleibt erhalten!

So das war mein Beitrag zum Thema: Was passiert, wenn sich die Erde aufhört zu drehen
Liebe Grüße,
Hamilton