C.C. Noack
Universität Bremen

März 1998

Was ist eigentlich eine 'Ruhemasse' ? [1]

Zusammenfassung:

Das Wort 'Ruhemasse' legt nahe, dass auch der Begriff 'bewegte Masse' von Nutzen sein könnte; die "berühmteste Formel des Jahrhunderts", die Einstein-sche Beziehung zwischen Energie und Masse, bleibt in diesem Zusammenhang jedoch seltsam undeutlich und wird recht unterschiedlich interpretiert.

In jüngerer Zeit ist über diese Interpretationsfragen eine lebhafte wissenschaftstheoretische Debatte unter Physik-Didaktikern aufgekommen.
Der Vortrag – der ausschließlich didaktischen Charakters ist – soll aus der methodischen Sicht der theoretischen Physik dazu beitragen, diese Debatte so schnell wie möglich zu beenden.

1. Einleitung

Anfang März 1996 wurde bei Sotheby's in New York eine 72 Seiten starke Handschrift Albert Einsteins aus dem Jahre 1912 versteigert. Die unveröffentlichte Arbeit, in der die spezielle Relativitätstheorie behandelt wird – ausführlicher als in der ursprünglichen Veröffentlichung von 1905 und in einer sehr sorgfältig redigierten Fassung – , war 1987 schon einmal bei Sotheby's versteigert worden. Damals war sie für 1.2 Millionen Dollar an einen privaten Sammler gegangen. Diesmal fand sie *keinen Käufer* [1].

Eine Reihe von privaten Briefen Einsteins an seine erste Frau Mileva dagegen (die übrigens ein ziemlich zweifelhaftes Schlaglicht auf seinen Charakter werfen), die am Ende des gleichen Jahres (1996) zur Versteigerung kamen, brachten es auf insgesamt 900 000 Dollar; ein Manuskript aus den Jahren 1913/1914, das umfangreiche Rechnungen zur Periheldrehung des Merkur (in Vorbereitung seiner 1915 erschienenen Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie) enthält, fand dagegen 'nur' für $ 398 500 einen Käufer [2].

Soviel zur Wertschätzung der Physik in der privaten (zahlenden) Meinung.

Im heutigen Vortrag soll es dagegen eigentlich nur um eine einzige Formel gehen, nämlich um die Einstein-sche Beziehung zwischen Energie und Masse,

$$E = mc^2 \quad ,$$

genauer: um die *physikalische Bedeutung* der in ihr verwendeten Symbole. Genau *welche* Energie ist mit E gemeint, *welche* Masse mit m ? Hängen die Messwerte dieser Größen vom gewählten Bezugssystem ab, und wenn ja: wie?

[1] Der vorliegende Text ist die redigierte und leicht erweiterte Fassung eines Vortrags, den der Verfasser am 2. Mai 1996 im *Physikalischen Kolloquium* der Universität Bremen gehalten hat.

Man kann die Frage, die Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sein soll, auch einfacher stellen: es gibt ja 4 verschiedene Möglichkeiten, die Einstein-sche Formel zu schreiben:

$$
\begin{aligned}
E &= mc^2 \\
E &= m_0 c^2 \\
E_0 &= mc^2 \\
E_0 &= m_0 c^2 \quad .
\end{aligned}
$$

Welches ist die 'richtige' Schreibweise? [zur Erläuterung: mit dem Index $_0$ soll das *Ruhesystem* der betrachteten Masse bezeichnet sein; m_0 ist also die *Ruhemasse*, E_0 die *Ruheenergie*, d.h. Masse bzw. Energie in dem Bezugssystem, in dem die Geschwindigkeit des betrachteten Körpers Null ist.] Anders ausgedrückt: hängt die Masse vom Bezugssystem ab? Gibt es einen Unterschied zwischen der sogenannten "Ruhemasse", m_0, und der sogenannten "relativistischen Masse", m ?

Einstein selbst ist bei der Beantwortung der Frage keine große Hilfe. Er hat nämlich seine eigene Schreib-weise bzw. Sprechweise im Laufe seines Lebens mehrfach geändert, vor allem in seinen verschiedenen Popularisierungen der Relativitätstheorie [13]. In der bereits genannten, unveröffentlichten Arbeit von 1912 findet man immerhin

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \quad ,$$

in dem zitierten Bericht der Süddeutschen Zeitung [1] so im facsimile wiedergegeben. In der Unterschrift unter dies facsimile macht der Redakteur des Berichts daraus allerdings einfach "die berühmte Gleichung '$E = mc^2$' " — ja, ist das nun dasselbe, oder nicht?

Inzwischen allerdings ist die Entwicklung der Physik ja nicht stehengeblieben, und die Frage nach der Bezugssystem-Abhängigkeit der Masse scheint aus der Sichtweise der modernen Physik ein für alle Mal geklärt:

> *Masse ist eine fundamentale Eigenschaft von Materie und als solche naturgemäß eine Invariante; sie ist von der Wahl des Bezugssystems unabhängig. Der Begriff 'Ruhemasse' ist daher überflüssig, wenn nicht irreführend; für den Begriff einer davon zu unterscheidenden 'bewegten Masse' ist in der Physik kein sinnvoller Platz.*

Im zweiten Teil des Vortrags werden wir zunächst darstellen, wie man – ganz analog zu den Newton-schen Gedankengängen – auf klarem und einfachem Wege zu dieser eindeutigen Sichtweise geführt wird.

In seltsamen Gegensatz zu dieser Eindeutigkeit gehen jedoch die Meinungen noch immer auseinander, wie man die Relativitätstheorie dem Neuling (ob auf der populärwissenschaftlichen Ebene, in der Schule, oder gar in der Physikausbildung auf der Hochschule) am besten verständlich macht, und Formulierungen wie "mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Masse zu" (oder, leicht raffinierter: "mit zunehmender Geschwindigkeit wird ein Körper immer schwerer") sind selbst in angesehenen neueren Lehrbüchern gelegentlich noch zu finden.

Wir werden im dritten Teil die Frage zu beleuchten versuchen, warum diese eigentlich veralteten Interpretationen der (speziellen) Relativitätstheorie so unausrottbar zu sein scheinen.

Zum Schluss werden wir schließlich noch kurz die Frage zu erörtern haben, ob sich denn an unseren Schlussfolgerungen, die sich allesamt im Rahmen der *speziellen* Relativitätstheorie bewegen, in der allgemeinen Relativitätstheorie etwas ändert.

2. Wie geht's richtig?

2.1 Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant

Der klarste Ausgangspunkt für jede Einführung in die spezielle Relativitätstheorie ist die *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* (d.h. ihre Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit der Lichtquelle), wie sie unmittelbar aus den Vakuum-Maxwell-Gleichungen ablesbar ist. Dies ist (fast) auch der historische Weg; Einstein selbst hat, jedenfalls in späteren Jahren, immer die zentrale Bedeutung des Michelson-Experiments für seine Gedanken zu Zeit und Raum betont.

Die *Konstanz der Lichtgeschwindigkeit* ist eine der wirklich fundamentalen *experimentellen Tatsachen* der Physik. Aber so wichtig das klassische Michelson-Experiment historisch auch ist: inzwischen gibt es einfachere Experimente, die diese Konstanz sehr direkt nachweisen. Besonders überzeugend ist das Experiment von Sadeh [3], in dem die Geschwindigkeit des emittierten Lichts bei der Elektronen-Paar-Vernichtung im Fluge gemessen wird:

> In dem Experiment lässt man die Positronen aus dem β^+-Zerfall von ^{64}Cu auf ein (Plexiglas-)target auftreffen. Durch geeignete Blei-Kollimatoren wird sichergestellt, dass die beiden bei der Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paars im target entstehenden Photonen unter einem relativen Winkel zwischen 152° und 159° das target verlassen. Dass der Winkel kleiner als 180° ist, bedeutet rein kinematisch (Impulserhaltung), dass das Elektron-Positron-Paar bei seiner Zerstrahlung eine Geschwindigkeit $\neq 0$ hat.
>
> Selbstverständlich darf man, wenn man diese Geschwindigkeit aus dem Winkel berechnen will, nicht die Lorentz-Transformation zu Hilfe nehmen; das wäre eine petitio principii. Aber auch mit der simplen klassischen Vektoraddition der Geschwindigkeitsvektoren findet man für die Geschwindigkeit der 'Lichtquelle' in diesem Experiment ein sattes $\beta := v/c \approx 0.7$ — und nicht nur 10^{-2} wie beim Michelson-Experiment! Die gleiche *klassische* Rechnung ergibt $v/c \approx 0.65$ für das eine, $v/c \approx 1.35$ für das andere Photon.
>
> Sodann werden die beiden Photonen in zwei NaJ-Detektoren nachgewiesen, die gleichweit vom target entfernt aufgestellt sind, und ihre Laufzeit wird in einer verzögerten Koinzidenz miteinander verglichen. Das Ergebnis ist: obwohl die Quelle eine Geschwindigkeit hat, die in der Größenordnung des Wertes c der klassischen Lichtgeschwindigkeit liegt, lässt sich keinerlei Abweichung der Geschwindigkeiten der beiden Photonen voneinander feststellen: *die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle.*
>
> Dieses Experiment ist – im Gegensatz zum klassischen Michelson-Experiment – so einfach, klar und aussagekräftig, daß ein Hinweis darauf in keiner einführenden Vorlesung fehlen sollte [2]. Auch ließe es sich mit geringen Kosten in jedem durchschnittlichen physikalischen Fachbereich – etwa im Rahmen des Fortgeschrittenen-Praktikums – durchführen.

In Formeln heißt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = c^2 \quad , \text{ wobei} \quad \begin{array}{rcl} d\vec{r} & := & \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \\ dt & := & t_2 - t_1 \end{array}$$

oder auch – differentiell geschrieben –

$$c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 = 0 \qquad \text{für } \mathit{Licht} \quad .$$

[2] Ein ganz ähnliches – wenn auch durch die Verwendung von neutralen Pionen als Quelle nicht mehr ganz so einfach durchführbares – Experiment stammt von Alväger und Mitarbeitern [4].

Einsteins unscheinbare, aber in ihren Konsequenzen monumentale Verallgemeinerung (die er mit allerlei Gedankenexperimenten zum Begriff der Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten plausibel zu machen suchte) war nun das fundamentale **Postulat** der speziellen Relativitätstheorie:

> Der Ausdruck
>
> $$(d\tau)^2 := c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 \qquad \text{(die ‘Minkowski-Metrik’)}$$
>
> ist konstant nicht nur für Licht, sondern für *alle* physikalischen Objekte .

Im speziellen Fall von Licht (allgemeiner: elektromagnetischer Strahlung im Vakuum) ist diese Konstante 0 , in anderen Fällen hat sie andere Werte; immer aber ist sie unabhängig vom Bezugssystem, in dem sie gemessen wird.

2.2 Invarianz und Kovarianz

Dieses Postulat ist seiner mathematischen Form nach eine *Invarianz*-Forderung. Was das bedeutet, will ich an einem Beispiel klarmachen:

Längen sind konstant

In der klassischen (Galilei-schen) Kinematik ist die Länge eines Körpers eine inhärente Eigenschaft des Körpers und daher unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, in dem sie gemessen wird; insbesondere also auch unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems im Raum:

$$(dL)^2 = (d\vec{r})^2 = \text{const.} \quad .$$

Mathemisch formuliert heißt das: die Größe $(d\vec{r})^2$ – die ‘euklidische Metrik’ – ist eine **Invariante** gegenüber *Drehungen des Koordinatensystems.*

Newton folgerte daraus:

- Koordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Impulse und auch *Kräfte* sind **Vektoren**,
- die *Zeit* ist ein **Skalar**,

und sein mechanisches Grundgesetz hat (in moderner Schreibweise) die **kovariante** Form

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} \quad .$$

‘Kovarianz’ will heissen: Zwar ist das Gesetz nicht unabhängig vom Bezugssystem, die Vektorkomponenten ändern sich ja bei einer Transformation des Koordinatensystems durchaus; aber diese Änderung ‘folgt’ gewissermaßen der Koordinatentransformation, die Größen ‘ändern sich mit’ den Koordinaten: sie sind ‘ko-variant’. Und da die Größen auf beiden Seiten der Gleichung sich in gleicher Weise kovariant transformieren, bleibt der physikalische Gehalt der Gesetzes unverändert [3].

[3] Früher nannte man ‘Kovarianz’ deshalb häufig auch ‘Forminvarianz’.

Aus kovarianten Gesetzmäßigkeiten kann man durch geeignete mathematische Manipulationen oft *invariante* Formulierungen ableiten. In diesem Falle multipliziere man das (vektorielle) Newton-sche Gesetz mit dem Vektor der Geschwindigkeit:

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}\,) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

$\leadsto$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}\right) = \frac{dA}{dt}$$

$$\boxed{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}}$$

also den Energiesatz der Mechanik als *invariant* formulierte Gesetzmäßigkeit.

Man sieht an diesem Beispiel deutlich, wie fruchtbar Kovarianz- und Invarianz-Betrachtungen für die Physik sein können.

Lorentz-Transformationen

Von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zum Postulat der *generellen* Invarianz der Minkowski-Metrik

$$d(c\tau)^2 := (c\,dt)^2 - (d\vec{r}\,)^2$$

ist es nur mathematisch nur ein kleiner Schritt. Man gewinnt damit einen klaren und überzeugenden Argumentationsstrang zur Behandlung der Lorentz-Transformationen und ihren so bedeutsamen Folgen für den Zeitbegriff.

Die einfachste Art, die Lorentz-Transformationen aus der Minkowski-Metrik herzuleiten, ist die Verwendung der Analogie [4] mit den rein räumlichen Drehungen, die (räumliche) Längen invariant lassen, verbunden mit der Analogie zwischen Winkel- und Hyperbel-Funktionen:

---

[4] Diese schöne (und auch rein mathematisch nützliche) Analogie zwischen Lorentz-Gruppe und Drehgruppe wird im Grunde *zunichte gemacht*, wenn man sie durch Einführen von $x_4 := ict$ übertreibt:

- der (ja doch wesentliche!) *Unterschied* wird unter den Teppich gekehrt, was das physikalische Verständnis nur unnötig *erschwert*,
- alle Versuche, den so eingeschleusten Begriff einer "imaginären Masse" wieder loszuwerden, führen nur zu völlig überflüssigen intellektuellen Verrenkungen,
- die Schreibweise ist besonders fehleranfällig, weil kaum ein Anfänger der Versuchung widerstehen kann, aus

  $${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 0$$

  den (fehlerhaften) Schluß

  $$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

  zu ziehen.

Siehe hierzu [5], aber auch die Bemerkungen am Ende von Abschn. 7-3 in [6].

Drehungen (in 2 Dimensionen)	Lorentz-Transformationen (in 1+1 Dimensionen)
$(\vec{r})^2 = x^2 + y^2$	$(c\tau)^2 = (c\,t)^2 - z^2$

ist invariant

$\rightsquigarrow$

$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$	$(c\,t') = (c\,t)\cosh\eta + z\sinh\eta$
$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$	$(\;z') = (c\,t)\sinh\eta + z\cosh\eta$
α ist der Drehwinkel	η ist die 'Rapidität' .

Die Analogie wird besonders fruchtbar, wenn man 2 Transformationen nacheinander ausführt: dann gilt

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad\Big|\qquad \eta = \eta_1 + \eta_2 \quad ,$$

solange die Dreh- bzw. die 'boost'-Achsen beider Einzeltransformationen gleich sind; bei Transformationen mit 2 verschieden orientierten Achsen (im dreidimensionalen Fall) dagegen wird die Mathematik deutlich komplizierter: nacheinander ausgeführte Transformationen vertauschen nicht mehr.

Exkurs: die Rapidität [5]

Was bedeutet der Parameter η der Lorentz-Transformation physikalisch? Mit der üblichen Notation

$$\gamma := \cosh\eta \quad , \qquad \beta := \tanh\eta \qquad \rightsquigarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

hat man

$$\begin{aligned} cdt' &= \gamma(cdt + \beta dz) \quad , \\ dz' &= \gamma(\beta \cdot cdt + dz) \quad . \end{aligned}$$

Wählt man nun für das Bezugssystem S' das 'Ruhesystem', also das System, in dem $dz' = 0$ ist, so folgt

$$\beta = -\frac{1}{c}\frac{dz}{dt} \quad .$$

β ist also die – dimensionslose – *Relativ-Geschwindigkeit* der beiden durch die Lorentz-Transformation verknüpften Koordinatensysteme.

[5] In der modernen Hochenergiephysik hat sich als Symbol zur Bezeichnung der Rapidität allgemein der Buchstabe y eingebürgert, während η üblicherweise für die sogenannte 'Pseudorapidität' (eine spezielle, mit der Rapidität verwandte, aber experimentell definierte Größe) reserviert ist. Diese Notation kann recht verwirrend wirken, wenn y zugleich für eine Koordinate eines dreidimensionalen Koordinatensystems verwendet wird — aus diesem Grunde verwenden wir in dem vorliegenden Aufsatz die umgekehrte Notation.

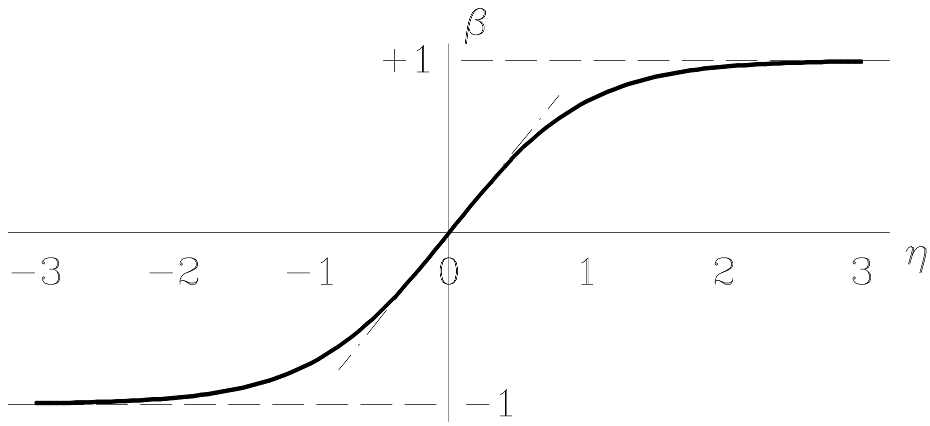
Nun ist für kleine η

$$\begin{aligned}\cosh\eta &= 1+\mathcal{O}(\eta^2)\\ \sinh\eta &= y+\mathcal{O}(\eta^2)\end{aligned}$$

und damit

$$\beta = \tanh\eta = \eta + \mathcal{O}(\eta^2) \quad .$$

η kann also für *kleine* Geschwindigkeiten – und das heißt im gesamten Bereich der Alltagserfahrung! – einfach mit der klassisch verstandenen *Geschwindigkeit* eines bewegten Körpers identifiziert werden. Bei Geschwindigkeiten, die vergleichbar sind mit der Lichtgeschwindigkeit, sieht es allerdings ganz anders aus:



Man sieht aus dem Vergleich, dass η die direkte Verallgemeinerung des Begriffs "Geschwindigkeit" auf die (spezielle) Relativitätstheorie ist. Um Verwechslungen zu vermeiden, hat sich dafür eine andere Übersetzung des Wortes "Geschwindigkeit" ins Lateinische durchgesetzt, nämlich "*Rapidität*" (engl. "rapidity", im Gegensatz zur "velocity").

Die *Rapidität* η ist aus zwei Gründen der für hohe Geschwindigkeiten angemessenere, weil im Grunde anschaulichere Begriff:

- die Rapidität eines Körpers wächst mit zunehmender Beschleunigung immer weiter an, während die Newton-sche Geschwindigkeit v nach oben durch die Lichtgeschwindigkeit beschränkt bleibt. Die anschauliche Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der kinetischen Energie bleibt also erhalten, wenn man als Geschwindigkeitsbegriff die *Rapidität* benutzt,

- die einfache Additivität der (Newton-schen) Geschwindigkeiten bleibt für die Rapidität auch im relativistischen Bereich erhalten (was auch im praktischen Gebrauch von erheblichem Vorteil ist), während das berüchtigte "Einstein-sche Additionsgesetz der Geschwindigkeiten" wenig anschaulich ist und praktisch nur von Nutzen, um den Charakter der Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit noch einmal zu beleuchten.

Nimmt man die Tatsache hinzu, dass bei kleinen Geschwindigkeiten die Newton-sche Geschwindigkeit und die Rapidität zusammenfallen, besteht eigentlich (außer vielleicht Nostalgie) kein Grund, den Newton-schen Geschwindigkeitsbegriff nicht vollständig durch die *Rapidität* zu ersetzen — natürlich erst und nur im Zusammenhang der Relativitätstheorie.

2.3 Vierervektoren

Aus den Eigenschaften der Lorentz-Tranformation sieht man, daß die Zusammenfassung von Zeit und Ort zu einem **Vierervektor** [6]:

$$\mathbf{x} := (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{r})$$

einen geometrischen Sinn hat: $\mathbf{x}$ gibt einen Punkt im Raum-Zeit-Kontinuum, an — so, wie $\vec{r}$ einen Punkt im gewöhnlichen (euklidischen) Raum angibt. Daß dieser "Minkowski"-Raum eine gegenüber der euklidischen *abgeänderte Metrik* hat, eben $(d\mathbf{x})^2 := (c\,dt)^2 - d\vec{r}^{\,2}$, ist einfach ein 'fact of life' (eben die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit).

Was aber ist die physikalische Bedeutung dieses invarianten Linien-Elements? Um das zu verstehen, schreiben wir $(d\mathbf{x})^2$ etwas um:

$$(d\mathbf{x})^2 = (cdt)^2 - (d\vec{r})^2 \quad ,$$

oder

$$\begin{aligned} (d\tau)^2 := \frac{1}{c^2}(d\mathbf{x})^2 &= (dt)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right) \\ &= (dt)^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (dt)^2 \cdot (1 - \beta^2) \\ &= \frac{1}{\gamma^2}(dt)^2 \quad , \end{aligned}$$

also

$$\boxed{d\tau = dt/\gamma} \; .$$

$d\tau$, die sogenannte "Eigenzeit", ist die Zeit in dem Bezugssystem, in dem das physikalische Objekt *ruht* ($v = 0 \;\rightsquigarrow\; \gamma = 1$, das "Ruhesystem"). Sie ist ein *invarianter Zeitbegriff* und somit am ehesten geeignet, an Newtons Begriff von der "absoluten Zeit" anzuknüpfen.

Damit kann man im Aufbau der relativistischen Kinematik genau den Gedankengängen Newtons folgen. Wir hatten gesehen, wie Newton aus der (von ihm bewusst und explizit an den Anfang der *prinzipia* [7] gestellten) *Invarianz der euklidischen Metrik* folgerte, dass die Naturgesetze *kovariant*, d.h. mit Hilfe von *Vektoren* (im dreidimensionalen euklidischen Raum) für Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft, und mit einer *invarianten* Zeit zu beschreiben seien.

In völliger Analogie zum Vorgehen von Newton ist es deshalb geboten, auch die relevanten Gleichungen der Relativitätstheorie in *Vektorform* zu schreiben (vornehm ausgedrückt: *kovariant* zu formulieren). Folgt man diesem methodischen Gedankengang, ist es ganz natürlich, als "Vierergeschwindigkeit" die Größe

$$\mathbf{u} := \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

[6] Wir schreiben hier Vierervektoren mit fettgedruckten kleinen lateinischen Buchstaben, ohne Vektorpfeile, und ohne Indizes. Die Index-Schreibweise (Tensor-Notation) für Vierervektoren ist zwar in der praktischen Rechnung sehr nützlich, lenkt aber in unserem Zusammenhang nur vom wesentlichen ab.

einzuführen (und nicht etwa $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$), d.h. nach der *Eigenzeit* zu differenzieren; denn nur die Eigenzeit ist Lorentz-invariant, also vom Koordinatensystem unabhängig, und nur so wird $\mathbf{u}$ ein Vierervektor.

Also schreiben wir jetzt sukzessive die Newton-schen Begriffsbildungen analog in Vierervektoren:

	Newton	Einstein
Geschwindigkeit kovariant: *Vektor*	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma(c, \vec{v})$
Quadrat der Geschw. invariant: *Skalar*	$v^2 = (\vec{v})^2$	$\mathbf{u}^2 = c^2$

Als nächstes müssen wir den *Impuls* einführen. Newton [7] nennt ihn die "Größe der Bewegung" , die er (gleich in seiner 'Definition 2') als das Produkt von Geschwindigkeit und Masse beschreibt. Die *Masse* wiederum kann für ihn am besten beschrieben werden ('Definition 1') als das Produkt aus Dichte und Volumen; kein Zweifel, dass er darunter eine inhärente und damit vom Bezugssystem *unabhängige* (in moderner Terminologie *invariante*) Eigenschaft versteht. Der Impuls ist also bei Newton – als das Produkt aus einem Vektor (Geschwindigkeit) mit einem Skalar (Masse) seinerseits ein Vektor.

In Analogie ergibt sich – und das ist der springende Punkt des ganzen Vorgehens – in der relativistischen Kinematik der Impuls völlig natürlich als ein Vierervektor. Anders ausgedrückt: damit sowohl die Geschwindigkeit als auch der Impuls ordentliche Vierervektoren werden, *muss* der Proportionalitätsfaktor, die Masse, wie schon bei Newton eine *Invariante* sein:

	Newton	Einstein
Impuls kovariant: *Vektor*	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{u}$

Daraus ergibt sich nun unmittelbar für die *Kraft* als (*invariante*!) zeitliche Änderung des Impulses wieder ein Vektor:

	Newton	Einstein
Kraft kovariant: *Vektor*	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = m \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$

($\mathbf{f}$ wird oft "Minkowski-Kraft" genannt.)

Damit ist der Aufbau der mechanischen Grundbegriffe in der speziellen Relativitätstheorie schon abgeschlossen. Was bleibt, ist aus diesen Grundbegriffen rechnerische Schlussfolgerungen zu ziehen.

2.4 Der Energiesatz

Wir rechnen zunächst das Grundgesetz $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$ in gewöhnliche Beschleunigungen um:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= m \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = m\gamma \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m\gamma \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) \\
&= m\gamma \left[\gamma \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\right] \quad .
\end{aligned}$$

Das ist 'kompliziert, aber nicht komplex': der Zusatzterm zur nichtrelativistischen Beschleunigung des γ-Faktors von der Geschwindigkeit, und diese Abhängigkeit ist eine direkte Folge der – allerdings in der Tat fundamentalen – Änderung des Zeitbegriffs in der Relativitätstheorie. Er hat nichts zu tun mit irgendwelchen obskuren "dynamischen Eigenschaften" der Masse.

Vergleichen wir weiter den *räumlichen* Anteils beider Kräfte:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \quad ,$$

so erhalten wir

$$\boxed{\vec{f} = \gamma \cdot \vec{F}} \; .$$

Wieder Newton folgend, versuchen wir, eine relativistische Verallgemeinerung des Energiesatzes durch skalare Multiplikation der (Minkowski-)Kraft mit der (Vierer-)Geschwindigkeit herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} &= m\,\mathbf{u}\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{m}{2}\frac{d}{d\tau}(\mathbf{u})^2 \\
&= 0 \,! \qquad\qquad (\text{wegen } \mathbf{u}^2 = c^2 = \text{ const. })
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$u_0 f_0 = \vec{u} \cdot \vec{f} \quad .$$

Links haben wir

$$u_0 f_0 = u_0 \frac{d}{d\tau} p_0 = \gamma c \gamma \frac{d}{dt} p_0 = \gamma^2 \frac{d}{dt}(c p_0) \quad .$$

Rechts ist

$$\vec{u} \cdot \vec{f} = \gamma \vec{v} \cdot \gamma \vec{F} = \gamma^2 \frac{dA}{dt} \quad ,$$

wobei wir den Newton-schen Energiesatz in der Form $\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{dA}{dt}$ benutzen. Wir erhalten so die wichtige Konsequenz

$$\boxed{E := c p_0 \text{ ist der relativistische Ausdruck für die } \textit{kinetische Energie}} \; .$$

Die Energie ist also – anders als in der nichtrelativistischen Mechanik – in der Relativitätstheorie *kein Skalar*: sie ist die nullte Komponente des Vierervektors des Impulses und als solche vom Bezugssystem abhängig!

Wie hängen Energie und der (dreidimensionale) Impuls zusammen? Dazu betrachten wir das invariante (Vierer-)Skalarprodukt des Impulsvektors mit sich selbst:

$$\mathbf{p}^2 = m^2\mathbf{u}^2 = m^2c^2 = {p_0}^2 - \vec{p}^{\,2} \quad ;$$

es folgt also

$$E^2 = (cp_0)^2 = c^2(m^2c^2 + \vec{p}^{\,2})$$

oder

$$E = c\sqrt{(mc)^2 + \vec{p}^{\,2})} \quad .$$

Im Gegensatz zur Newton-schen Mechanik ist die Integrationskonstante durch die Kovarianz festgelegt!

Im *Ruhesystem* ($\vec{p} = 0$) folgt [$E_{\vec{p}=0} =: E_0$]

$$\boxed{E_0 = mc^2} \,,$$

in Worten:

> *Die (kinetische) Energie eines Systems hängt – auf dem Wege über seinen* Impuls – *vom Bezugssystem ab.*
>
> *Im dem Bezugssystem, in dem das System* ruht, *ist seine (kinetische!) Energie, E_0, nicht Null (oder beliebig), sondern proportional zur seiner (vom Bezugssystem* unabhängigen*) Masse m .*

Es hat sich also herausgestellt, dass von den vier am Anfang des Vortrags angebotenen Formulierungen der Einstein-schen Formel nur die *dritte* klar, unzweideutig und nicht redundant (d.h. ohne Indizes, die nichts bedeuten) geschrieben ist.

Eine – mindestens historisch wichtige – Nebenfrage ist damit auch geklärt, nämlich die, ob dem Lichtquant eine Masse zukommt. Auf der Ebene der speziellen Relativitätstheorie [7] ist die Antwort klar: *das Photon hat die Masse Null.*

Wie kann es dann überhaupt eine nichtverschwindende Energie haben? *Antwort*: weil die Einstein-sche Formel für die Energie eines Systems in einem andern als dem Ruhesystem eben gerade *nicht* $E_0 = mc^2$ lautet, sondern $E = c\sqrt{(mc)^2 + \vec{p}^{\,2})}$. Und warum kann man das nicht in der Form $E = m\gamma c^2$ schreiben? *Antwort*: weil es für ein Photon *kein Ruhesystem* gibt! Ein Photon bewegt sich (nach dem Grundpostulat der gesamten Theorie) immer mit Lichtgeschwindigkeit; damit wird $\gamma = \infty$, und $m\gamma$ infolgedessen ein unbestimmter Ausdruck.

2.5 Philosophisches

Aus der bisherigen Entwicklung folgt ziemlich zwangsläufig, dass wir die *Masse* als eine *invariante* Größe auffassen müssen. Aber auch philosophisch ist diese Begriffsbildung naheliegend (wenn nicht zwingend): spätestens seit Newton ist 'Masse' ein quantitatives Maß für die Menge von "Materie", der Substanz, mit der man es zu tun hat.

Eine solche "Menge an Substanz" sollte vom physikalischen Inhalt des Begriffs her unabhängig vom Koordinatensystem definiert sein. Es ist daher systematisch geboten, einen Massenbegriff zu haben, der durch einen Lorentz-Skalar beschrieben wird.

Die Tatsache, daß aus moderner atomistischer Sicht alle Materie an Teilchen geknüpft ist, man die "Menge an Substanz" also durch Angabe von Sorte und Anzahl der beteiligten Teilchen bestimmen kann (Avogadro!), verstärkt diese Argumentation noch einmal. Denn Begriffe wie "Sorte" und "Anzahl" sind sinnvoll, klar und konsistent nur als *Skalare* denkbar — alles andere würde wieder nur zu intellektuellen Verrenkungen führen, die den Anfänger nur verwirren können.

[7] Wie es sich damit in der allgemeinen Relativitätstheorie verhält, darauf kommen wir ganz zum Schluss noch kurz zu sprechen.

3. Warum sollte man's anders machen?

Wir haben jetzt gesehen — indem wir das Einstein-sche Postulat von der Invarianz der Minkowski-Metrik systematisch analysiert haben, im übrigen aber begrifflich Newton gefolgt sind:

> **Nicht der Begriff *Materie* (Masse) wird in der (speziellen) Relativitätstheorie einer kritischen Revision unterworfen, sondern die Begriffe *Raum* und *Zeit*.**

Diese klaren und in sich konsistenten Begriffsbildungen sind im Grunde so übersichtlich und einfach, dass sie auch dem Anfänger einleuchten können. Warum aber hat sich diese Sichtweise auch nach neunzig Jahren, in denen die Physik ja nun wahrhaftig in mannigfaltiger Weise 'modern' geworden ist, im Unterricht immer noch nicht vollständig durchgesetzt — auf der Schule wie auch im Anfänger-Unterricht der Hochschule? Und warum gibt es auch heute noch eine lebhafte didaktische Diskussion [8, 9, 10] darüber?

Bei der Suche nach einer Antwort auf diese Fragen sind mir 4 mögliche Motive dafür aufgefallen, warum man es möglicherweise anders machen wollte.

1. Motiv: "Ehrfurcht vor den Altvordern"

Historisch war es ja alles nicht immer so einfach und übersichtlich; schon garnicht vor der Einstein-schen Arbeit von 1905.

Zum einen taucht die "relativistische Masse" in Gestalt der Formel $E = mc^2$ schon fünf Jahre vorher auf: in einer Arbeit von H. Poincaré [11]. In dieser Arbeit hat Poincaré im Zusammenhang mit dem Poynting'schen Satz einem Lichtstrahl mit der Energie E eine 'Masse' zugeordnet, die den Wert E/c^2 haben sollte (*vor* Einstein!). Auch spricht H. Lorentz schon 1901 von einer 'relativistischen Masse' [12]. Und selbst Pauli unterscheidet noch in seinem berühmten Handbuchartikel von 1921 die Begriffe "Ruhemasse", m_0, und "Masse", $m = \gamma m_0$. Das erste Lehrbuch, das konsequent nur *einen* Massebegriff benutzt (selbstverständlich einen invarianten), war wohl das 1940 erschienene von Landau und Lifschitz.

Einstein selbst war in dieser Frage merkwürdig schwankend. Während in schon in seiner Arbeit von 1905 nur *ein* einheitlicher Massenbegriff und die Formel $\Delta E_0 = \Delta mc^2$ auftaucht, hat er schon ein Jahr später [14] davon geredet, dass jeder Energie eine *Masse* E/c^2 zukomme (was ja z.B. für Photonen nicht gilt). In dem eingangs bereits erwähnten Manuskript wiederum steht wieder eine Formel, die eher dem Resultat von 1905 entspricht, u.s.w. [8].

Soll man sich also wirklich, noch hundert Jahre später, durch die Ehrfurcht vor den Altvordern leiten lassen? An wem, und vor allem an was, soll man sich denn dann orientieren?

---

[8] Schlussendlich hat er allerdings eine klare Haltung eingenommen, die er 1948 in einem Brief explizit so formuliert hat:

> "Es ist nicht gut, von der *Masse* $M = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ eines bewegten Körpers zu sprechen, da für M keine klare Definition gegeben werden kann. Man beschränkt sich besser auf die "Ruhe-Masse" m ... "

[Brief an L. Barnett; facsimile in [9].].

2. Motiv: "Angst vor Kovarianzbetrachtungen"

Kovarianzbetrachtungen mögen manchen, vor allem eingefleischten Experimentalphysikern, als allzu theoretisch oder gar formalistisch vorkommen. Gewiss sind derartige Überlegungen wesentlicher Bestandteil der Theoretischen Physik; doch wer sie schon deshalb ablehnt oder auszuklammern versucht (wie z.B. Philipp Lenard in seinem berüchtigten Lehrbuch [16], das fast völlig ohne jede Formel auszukommen sucht), verkennt die Einheit physikalischen Denkens und begibt sich ohne Not einer der zentralen und fruchtbarsten Methoden der Physik — *wie* fruchtbar, das zeigt ja schon das Beispiel Newton deutlich genug.

3. Motiv: "Angst vor dem Viererimpuls"

Es ist eine (auch direkt experimentell verifizierbare!) Tatsache, dass sich Energie und Impuls bei einem Wechsel des Bezugssystems *gemeinsam* transformieren. Die Einführung eines Viererimpulses zur adäquaten Beschreibung dieser Tatsache stellt keine Komplikation dar, sondern *erleichtert* vielmehr, wie wir gesehen haben, das Verständnis der Zusammenhänge.

Dennoch ist der Versuch immer noch weit verbreitet, aus Angst vor einem 'neuen Formalismus' den Begriff des Viererimpulses zu vermeiden und stattdessen die nichtrelativistische Formel

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

in die Relativitätstheorie 'hinüberzuretten', und zwar eben durch Einführung des zusätzlichen Begriffs einer "bewegten Masse'. Das geht natürlich: da in Wirklichkeit $\vec{p} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}$ ist, setzt man einfach

$$\begin{array}{lcc} m & \longrightarrow & m_0 \\ m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} & \longrightarrow & M \end{array}$$

und nennt eben m_0 die "Ruhemasse", M die "bewegte" (oder noch verheerender: die "relativistische") Masse. Das hat aber zwei gravierende Nachteile [9]:

1. Wie wir oben gesehen haben, verliert die Newton-sche Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Körpers ihre Anschaulichkeit, wenn ihre Größe mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar wird: sie bleibt beschränkt, auch wenn sie anschaulich beliebig wachsen sollte (nämlich bei einer Beschleunigung), und sie bleibt nicht additiv, sondern gehorcht einem komplizierten und unanschaulichen "relativistischen Additionstheorem",

2. die "bewegte Masse" M wird eben von der Bewegung abhängig und verliert so ihre anschauliche Bedeutung als eine unmittelbare 'Eigenschaft' der Materie.

4. Motiv: "Altgewohntes bleibt verständlich, auch wenn man's zurechtbiegt"

Aber tun wir einmal diese Einwände als 'nur ästhetisch' ab und setzen uns über sie hinweg. Biegen wir also die altgewohnte Impulsdefinition $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ zurecht, indem wir konsequent die "bewegte Masse" M einführen:

$$\vec{p} = M \cdot \vec{v} \quad .$$

[9] Einstein: "Es ist nicht gut … " (vorhergehende Fußnote).

Wirklich konsequent aber ist das erst dann, wenn wir die neue Definition auch *benutzen*, etwa, indem wir (wider besseres Wissen [10]) auch das Newton-sche Grundgesetz in seiner naïven Form beizubehalten versuchen. Setzen wir also

$$\vec{F} \stackrel{!}{=} M \frac{d\vec{v}}{dt} \quad .$$

Was kommt dabei heraus? Dazu müssen wir wieder ein wenig rechnen: wir hatten

$$\mathbf{f} = m \cdot \frac{\mathbf{u}}{d\tau} \ , \qquad \mathbf{u} = \gamma(c, \vec{v}) \qquad \text{und } \vec{F} = \vec{f}/\gamma \quad ;$$

also ist

$$\vec{F} = m \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) = m \left[\gamma \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{v} \right] \quad ,$$

oder (nach $\frac{d\vec{v}}{dt}$ aufgelöst)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F} - (\vec{v} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{v}/c^2}{m\gamma} \quad ,$$

ein durchaus komplizierter Ausdruck: (Newton-sche) Kraft und (Newton-sche) Beschleunigung sind *nicht* gleichgerichtet!

Man kann zwei Spezialfälle unterscheiden:

a) $\vec{F} - \vec{v}$ **:** in diesem Fall verschwindet der zweite Term, und es ist

$$\vec{F} = m\gamma \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ,$$

die "bewegte Masse" M ergibt sich hier also zu $M = m \cdot \gamma$. Man spricht dann von der "transversalen Masse" M_- ;

b) $\vec{F} \parallel \vec{v}$ **:** es folgt

$$\vec{F} = m\gamma^3 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ,$$

hier ist die "bewegte Masse" also $M = m\gamma^3$, was als "longitudinale Masse" $M_{||}$ bezeichnet wird [11].

Man sieht: der Versuch der Vereinfachung durch Einführung einer "bewegten Masse" stellt nicht nur selbst eine bereits unintuitive und schwer verständliche Begriffsbildung dar, sondern führt fast zwangsläufig auf die vollends obskuren Begriffe der "longitudinalen" und "transversalen Masse" [12], die noch nie ein Physiker anschaulich interpretieren konnte (einschließlich derer, die sie in die Welt gesetzt haben!), weshalb sie ja auch ganz aus der Mode gekommen sind und nur noch für die Geschichte der Physik interessant.

Weshalb dann nicht auch die gesamte "relativistische Massenveränderlichkeit" ein für alle Mal in die gnädigen Hände der Physikhistoriker übergeben?

---

[10] Sommerfeld [15] : " ... wie man es früher (um 1900) unzweckmäßigerweise getan hat ... "

[11] Die Begriffe "transversale" und "longitudinale" Masse stammen von H.A. Lorentz.

[12] Dazu noch einmal Sommerfeld [15] : "Demgegenüber betonen wir, dass diese Unterscheidung hinfällig wird, sofern wir nur das Bewegungsgesetz in der rationellen Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{1 - \beta^2} \right) = \vec{F}$$

benutzen."

4. Schlussbemerkungen

Und die Allgemeine Relativitätstheorie?

In diesem ganzen Vortrag habe ich – in strikter Beschränkung auf die *spezielle* Relativitätstheorie – nur von der *trägen* Masse geredet. Es ist selbstverständlich legitim zu fragen, was in der *allgemeinen* Relativitätstheorie aus der – schon von Newton formulierten! – "Äquivalenz von schwerer und träger Masse" und dem sogenannten 'Machschen Prinzip' wird.

Natürlich ist dort alles ein wenig komplizierter, und in der Tat wird dort auch der Begriff der "Materie" einer kritischen Revision unterzogen [13]. Man darf aber wohl davon ausgehen, dass Physikstudenten (und fertig ausgebildete Physiker), die aufgrund ihres Ausbildungsstandes in der Lage sind, sich ernsthaft in die allgemeine Relativitätstheorie einzuarbeiten, die in diesem Vortrag behandelten semantischen Probleme hinter sich gelassen haben. Deshalb nur zwei kurze Bemerkungen dazu:

1. das Mößbauer-Experiment von Pound und Rebka [18] zeigt im *irdischen* Experiment, daß auch Licht vom Gravitationsfeld beeinflusst wird. Dieses wunderschöne Experiment selbst gibt aber keinen unmittelbaren Anlass, dem Photon eine nichtverschwindende Masse zuzuschreiben, denn die beobachtete Blauverschiebung der Frequenz zeigt ja mittels der von Einstein(!) gefundenen Beziehung $E = \hbar\omega$ gerade eine Änderung der *Energie* im Schwerefeld — zu seiner Interpretation braucht man nirgends den Begriff "Masse",

2. nach den Einsteinschen Feldgleichungen ist es die *Energie-Impuls-Verteilung* im Universum, die dessen Metrik und damit die Gravitationskräfte bestimmt. Auch hier gehen nicht die *Massen*, sondern die *Energien* (und Impulse!) ein, und es ist deshalb auch hier kein Anlaß, von veränderlichen Massen zu reden.

Ich möchte schließen, indem ich zunächst die einleitende (wahre!) Anekdote aus dem Aufsatz von Carl Adler [8] zitiere:

> "Does mass really depend on velocity, dad?", my son asked me after his first day of high school physics. My answer: "No!" "Well, yes ... " "Actually, no, but don't tell your teacher."
>
> The next day my son dropped physics ... "

Und schließlich – gewissermaßen als Quintessenz – möchte ich die Schlussbemerkung des klaren Artikels von Lev Okun [9] wörtlich wiedergeben (dem ich auch sonst so manche Anregung verdanke):

> Every year millions of boys and girls throughout the world are taught special relativity in such a way that they miss the essence of the subject. Archaic and confusing notions are hammered into their heads. It is our duty – the duty of professional physicists – to stop this process.

[13] Man sieht das wunderbar am Titel eines der nach wie vor besten Bücher über dieses Thema: *Raum – Zeit – Materie*, von Hermann Weyl [17].

Literatur

[1] Süddeutsche Zeitung v. 18.3.96, Weser Kurier vom gleichen Tage.

[2] New York Times v. 26.11.96 .

[3] D. Sadeh, Phys.Rev.Lett. **10**, 271 (1963)

[4] T. Alväger et al., Phys.Lett. **12**, 220 (1964)

[5] Ch.W. Misner, K.S. Thorne und J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco (1973), Box 2.1 (p.51)

[6] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2.Aufl., Addison-Wesley, Reading MS (1980)

[7] I. Newton, *The Principia*, übers. ins Englische von A. Motte, Prometheus Books, Amherst NY (1995)

[8] C.G. Adler, Am.J.Phys. **55**, 739 (1987), und die umfangreiche dort zitierte Literatur

[9] L.B. Okun, Physics Today **42**, 31 (1989). Siehe auch die zahlreichen Leserbrief-Reaktionen zu diesem Aufsatz in Physics Today **43**, 13-15,115-117 (1990)

[10] T.R. Sandin, Am.J.Phys. **59**, 1031 (1991)

[11] H. Poincaré, Arch. Neerland **5**, 252 (1900)

[12] H.A. Lorentz, *The Theory of Electron*, Wiederabdruck Dover Publ., New York (1952)

[13] z.B. A . Einstein, *The Meaning of Relativity*, Methuen, London (1956), e.g. p.44.

[14] A . Einstein, Ann.Phys. (Leipzig) **20**, 371 (1906)

[15] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. I: Mechanik*, Akad.Verlagsges. Leipzig (1954), § 4

[16] Ph. Lenard, *Deutsche Physik* (sic!), J.F. Lehmanns, München-Berlin (1936)

[17] H. Weyl, *Raum – Zeit – Materie*, (1918), Wiederabdruck Dover Publ., New York (1952)

[18] R.V. Pound und G.A. Rebka, Phys.Rev.Lett. **4**, 337 (1960)
R.V. Pound und J.L. Snider, Phys.Rev. **B 140**, 788 (1965)