

Die Voraussetzungen für den deutschen Idealismus schaffte Immanuel Kant. Ihm ging es vor allem um die Erforschung und Auseinandersetzung des Erkenntnisprozess. Sein Buch über „Die Kritik der reinen Vernunft“ wird als wichtiger Text der Neuzeit angesehen.. In Kants „Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“ wird seine Lehre vereinfacht dargestellt. Hauptsächlich beschäftigt er sich dabei mit der Frage: Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?

Diese Frage gliedert sich wiederum in vier Teilfragen auf, nämlich: Wie ist reine Mathematik, Naturwissenschaft, Metaphysik und die Wissenschaft als Metaphysik möglich? Im folgenden Text werde ich mich, bei der Beantwortung der Ausgangsfrage, auf den Teilpunkt der Mathematik beziehen.

Nach Kant begründet sich, durch das Zusammenspiel von Denken und Anschauung, das Erkennen. Aus diesem Grund wird die Eigenbestimmtheit des Erkennens in zwei Prinzipien unterschieden: zum einen in die Eigenbestimmtheit des Denkens¹ und zum anderen in die Eigenbestimmtheit der Anschauung.² Wenn apriorische Urteile durch die Eigenbestimmtheit des Denkens begründet werden, dann handelt es sich dabei um ein analytisches Urteil.³ Dieses erfolgt auf der Grundlage des Widerspruchsprinzips. Wenn man den Satz „Venusfrauen sind gelb“ betrachtet, dann ist dieser formal gesehen korrekt geformt, auch wenn diese korrekte Form nichts über die Richtigkeit des Inhaltes aussagt. Allerdings könnte der Satz nun neu geformt werden: „Venusfrauen sind gelb und gänzlich ohne Farbe“. An dieser Stelle greift das Widerspruchsprinzip, denn wenn ich weiß, dass es sich bei dem Wort Gelb um eine Farbe handelt, dann kann die 'Venusfrau' nicht eine Farbe besitzen und gleichzeitig keine. „Eben darum sind auch alle analytischen Sätze Urteile a priori, wenngleich ihre Begriffe empirisch sein, z.B. Gold ist ein gelbes Metall; denn um dieses zu wissen, brauche ich keiner weitem Erfahrung, außer meinem Begriffe vom Golde, der enthielte, daß dieser Körper gelb und Metall sei [...]“⁴ Dem analytischen Urteil wird das synthetische Urteil⁵ entgegengesetzt.

Werden apriorische Urteile durch die Eigenbestimmtheit der Anschauung begründet, so handelt es sich dabei um mathematische Urteile. Diese Art des Urteils wird als synthetisch-apriorisch

1.

-
- 1 Bei der Eigenbestimmtheit des Denkens fungiert die Logik als „Analyseform“, da sie die Form des Denkens an sich untersucht.
 - 2 Durch die Anschauungsformen Raum und Zeit wird die Eigenbestimmtheit der Anschauung definiert.
 - 3 Der Prädikatbegriff ist im Subjektbegriff enthalten. z.B. Herr Meyer ist ein Mann. „Analytische Urteile sagen im Prädikate nichts, als das, was im Begriffe des Subjekts schon wirklich, obgleich nicht so klar und mit gleichem Bewußtsein gedacht war“ Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 18
 - 4 Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 19
 - 5 Können a posteriori (empirischer Ursprung) oder a priori sein. Das Widerspruchsprinzip allein greift dort nicht mehr an. Sie brauchen noch ein anderes Prinzip und zwar eines bei dem der jeweilige Grundsatz (egal welcher Art) vom Widerspruchsprinzip abgeleitet werden muss, aber nicht alles daraus abgeleitet werden kann. Des weiteren teilt sich das synthetische Urteil in zwei Klassen auf: Erfahrungsurteile und mathematische Urteile.

bezeichnet. Die Anschauungsformen Raum und Zeit artikulieren nach Kant die Eigenbestimmtheit der Anschauung. Mathematische Urteile werden im einzelnen als synthetisch bezeichnet, auch wenn dieser Satz den Vermutungen, die manche Menschen über mathematische Urteile haben, entgegengesetzt zu sein scheint. Man ging davon aus, dass die Schlüsse der Mathematiker dem Widerspruchsprinzip einhergehen würden. Somit dachte man sich, dass auch die jeweiligen Grundsätze vom Widerspruchsprinzip erkannt werden würden. Dies stellte jedoch einen großen Irrtum dar, „[...] denn ein synthetischer Satz kann nach dem Satze des Widerspruchs eingesehen werden, aber nur so, daß ein anderer synthetischer Satz vorausgesetzt wird, aus dem er gefolgert werden kann, niemals aber an sich selbst.“⁶ Kant bemerkt, dass eigentliche mathematische Sätze immer Urteile sind, welche a priori, aber nicht empirisch sind. Die Notwendigkeit ihrer Existenz kann sich nicht aus der Erfahrung ableiten. Aus diesem Grund schränkt Kant seinen Satz auf die reine Mathematik ein. Um dies genauer zu erklären führt Kant ein Beispiel an: $7+5=12$. Zunächst könnte man denken, dass es sich hierbei nur um einen analytischen Satz handelt. Dies wäre nur dann der Fall, wenn es keine andere Lösung für das Ergebnis Zwölf geben kann. Der Begriff der Summe enthält nichts anderes als die Vereinigung von Fünf und Sieben. Diese Vereinigung beider Zahlen zu einer einzigen Zahl sagt aber noch nichts darüber aus, was die einzige Zahl sei. Den Begriff der Zwölf denkt man sich nicht allein dadurch, dass man sich die Vereinigung von Fünf und Sieben denkt. „[...] ich mag meinen | Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen.“⁷ Die Zwölf ist nicht in der gleichen Art und Weise expliziert wie $7+5$, denn ich kann die Zwölf auch auf andere Weise hervorbringen, wie z.B $8+4$, $10+2$, $11+1$ etc. Um aber zu dem Ergebnis gelangen zu können, muss man über den Begriff hinausgehen. Dies geschieht mit Hilfe der Anschauung. Indem man beispielsweise seine Finger zur Hilfe nimmt, kann man die Aufgabe berechnen. Der Begriff wird durch den Satz $7+5=12$ in der Hinsicht erweitert, dass man diesem einen neuen Begriff hinzufügt, welcher in jenem jedoch nicht gedacht war. Bei dem neuen Begriff handelt es sich um den arithmetischen Satz. Dieser ist jederzeit synthetisch, was gerade dann zu erkennen ist, wenn man mit größeren Zahlen rechnet. Denn dann wird einem klar, dass man die Anschauung zu Hilfe nehmen muss, um die entsprechende Aufgabe berechnen zu können, da durch eine bloße Zergliederung unserer Begriffe dies nicht möglich wäre. Die Summenbildung ist somit eine synthetische Operation, da man erst einmal rechnen muss, um das Ergebnis zu erhalten, und dieses nicht schon analytisch vorliegt. Des weiteren ist aber die wichtigste Überlegung im Vorfeld, dass man sich die Zahlen Sieben und Fünf

2.

6 Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 20

7 Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 21

erst einmal a priori darstellen muss und dann kann man sie erst für Berechnungen verwenden. Der Mathematische Begriff (z.B. Zahlen) wird schon vorausgesetzt. Man muss sich zunächst einmal erschließen, dass es einen Zustand (Einzahl) gibt und daraus folgt, dass es mehrere Zustände (Mehrzahl) geben kann. Um z.B. einen Kieselstein von anderen unterscheiden zu können, muss ich zunächst einmal eine Zählungsart entwickelt haben, um diese Aufgabe durchzuführen. Arithmetik und Algebra werden der Zeitform zugeteilt. Diese Erklärung ist auch auf den Grundsatz der reinen Geometrie anzuwenden, wodurch deren Grundsätze ebenfalls nicht analytisch sind. Denn auch in dieser Disziplin der Mathematik wird die Anschauung zu Hilfe genommen. „Daß die gerade Linie zwischen zweien Punkten die kürzeste sei, ist ein synthetischer Satz. Denn mein Begriff vom Geraden enthält nichts von Größe, sondern nur eine Qualität.“⁸ Man muss sich noch den Begriff des Kürzesten hinzu denken. Dieser lässt sich jedoch durch keine Zergliederung vom Begriff der geraden Linie erschließen. Deshalb muss die Anschauung hinzugenommen werden, „[...] vermittelt deren allein die Synthesis möglich ist.“⁹ Die Geometrie dient hierbei als eine Wissenschaft, die der Raumform zugeordnet wird. Es gibt auch Grundsätze die analytisch sind und auf dem Widerspruchsprinzip beruhen (z.B. $a=a$ oder $(a+b)>a$). Dabei dienen sie jedoch in einer 'Methodenkette', als identische Sätze' und nicht als Prinzipien. Da diese in der Anschauung dargestellt werden können, werden sie in der Mathematik zugelassen. Den jeweiligen Begriffen wird somit ein bestimmtes Prädikat hin zgedacht, wobei jedoch die Notwendigkeit, dass man das bestimmte Prädikat denkt, dem Begriff schon angehaftet ist. Allerdings besteht nicht die Frage darin was wir dem bestehenden Begriff hinzu denken sollen, sondern was wir wirklich in ihm denken. Anhand dessen erkennt man „[...] daß das Prädikat jenem Begriffe zwar notwendig, aber nicht unmittelbar, sondern vermittelt einer Anschauung, die hinzukommen muß, anhänge.“¹⁰ Zwischen der allgemeinen Erkenntnis a priori und der mathematischen Erkenntnis besteht der wichtigste Unterschied darin, dass die mathematische Erkenntnis nicht aus Begriffen, sondern aus der Konstruktion dieser Begriffe dargestellt und erklärt wird. Eine empirische und konkret inhaltliche Gegenständlichkeit wird von der Mathematik nicht untersucht, denn diese nimmt nur die Form der Anschauung zu Hilfe. Deshalb ist sie in der Lage sich a priori zu vollziehen. Die Mathematik ist a priori, da man mit Hilfe der Anschauung das Widerspruchsprinzip erkennen kann. Die Anschauung, mit Hilfe derer man Begriffe darstellen kann, ist keine empirische Anschauung, sondern eine reine Anschauung. Ein Bild von einem Kreis oder Dreieck ist immer nur eine Art

3.

8 Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 22

9 Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 22

10 Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 22

Abstraktionsstütze für mathematische Begrifflichkeiten. Diese sind jedoch nur Darstellungen und keine korrekten mathematischen Elemente. Zum Beispiel darf ein Punkt keine Ausdehnung haben. Wenn ich jedoch einen zeichne besitzt dieser eine Ausdehnung. Mathematische Gebilde sind ideale Gebilde, denn man kann diese nie in ihrer Reinheit darstellen, da es immer Unvollkommenheiten in der Darstellung gibt. Was ist aber nun die reine Anschauung?

Sie ist ideell. Wir sehen die Unvollkommenheiten und abstrahieren davon. Dieses Abstrahieren und das Bewusstsein davon, dass die empirische Anschauung an sich ungenau ist, bezeichnet Kant als reine Anschauung. Des weiteren ist zu sagen, dass Kant zwischen der logischen und der realen Möglichkeit eines Begriffes unterscheidet. Ein logischer Begriff ist ein Begriff, welcher nicht gegen das Widerspruchsprinzip verstoßen darf. Zum Beispiel wäre der Begriff der 'Venusfrau' ein logisch möglicher Begriff. Allerdings wäre ein viereckiges Sechseck kein logisch möglicher Begriff. Wenn man wissen möchte, ob ein Begriff ein real möglicher Begriff ist, so muss man nur prüfen, ob es für diesen in der Anschauung ein Beispiel gibt. Wenn man z.B. den Begriff 'Baum' überprüft, so stellt man fest dass es in der Anschauung ein Beispiel dafür gibt. Damit wäre festgestellt, dass es sich um einen real möglichen Begriff handelt. Würde man jedoch den Begriff 'Venusfrau' überprüfen, so könnte man kein Beispiel in der Anschauung finden, weswegen es sich um keinen real möglichen Begriff handeln würde. Um es vereinfachter auszudrücken hat für Kant die Mathematik den Vorzug, dass die jeweiligen Begriffe eine Realmöglichkeit erhalten, da sie durch die Konstruktion in der reinen Anschauung a priori dargestellt werden können.

Die wichtigste Bedingung, weshalb reine Mathematik möglich ist, ist die reine Anschauung, „[...]in welcher sie alle ihre Begriffe in concreto, und dennoch a priori darstellen, oder, wie man es nennt, sie konstruieren kann.“¹¹ Jedoch erschließt sich für Kant noch eine weitere Frage: „[...] wie ist es möglich, etwas a priori anzuschauen?“¹² Anschauung ist eine Vorstellung, welche von einem gegenwärtigen Gegenstand abhängig ist. Aus diesem Grund ist es demnach unmöglich eine a priori ursprüngliche Anschauung zu erhalten, da diese sich auf einen Gegenstand, welcher weder vorher noch gegenwärtig gegeben ist, beziehen müsste. Daraus folgt nun eine weitere Frage, nämlich: Wie kann es zu einer Anschauung eines Gegenstandes, noch vor dem Gegenstand selbst, kommen?

Die Antwort auf diese Frage ist die sinnliche Anschauung. Geht die Anschauung einem Gegenstand voraus, wodurch eine Erkenntnis a priori stattfindet, so ist dies nur möglich „[...] wenn sie nämlich nichts anders enthält, als die Form der Sinnlichkeit, die in meinem Subjekt vor allen wirklichen

4.

11 Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 38

12 Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 38

Eindrücken vorhergeht, dadurch ich von Gegenständen affiziert werde.“¹³ Dadurch ist es uns möglich Dinge a priori anzuschauen, aber wir können somit auch nur Objekte so erkennen wie sie uns erscheinen. Wir können jedoch nicht sehen, wie sie an sich sind. Ein Ding ist nämlich an sich ein Ding, welches unabhängig von unserer Erkenntnis ist. Aber was bedeutet es wenn ich von einem Ding an sich Erkenntnis besitze? Das ist so zu erklären, indem man z.B. einen Tisch sieht, welcher grau ist. In meiner Anschauung sehe ich den Tisch, sowie dass dieser grau ist. Nun muss ich mir jedoch die Eigenschaft des Tisches, nämlich dass dieser grau ist, in mein Bewusstsein übertragen. Ich muss bestimmen was grau ist. Dazu muss ich aber wissen, dass Grau eine Farbe ist. Wenn ich das aber nicht weiß, dann hab ich zwar eine unmittelbare¹⁴ Anschauung von dem Tisch, aber ich kann das Grau an sich nicht bestimmen, weil ich von der Farbe Grau in diesem Fall keine Ahnung habe.

„Reine Mathematik ist, als synthetische Erkenntnis a priori, nur dadurch möglich, daß sie auf keine andere als bloße Gegenstände der Sinne geht, deren empirischer Anschauung eine reine Anschauung (des Raumes und der Zeit) und zwar a priori zum Grunde liegt, und darum zum Grunde liegen kann, weil diese nichts anders als die bloße Form der Sinnlichkeit ist, welche vor der wirklichen Erscheinung der Gegenstände vorhergeht, indem sie dieselbe in der Tat allererst möglich macht. Doch betrifft dieses Vermögen, a priori anzuschauen, nicht die Materie der Erscheinung, d.i. das, was in ihr Empfindung ist, denn diese macht das Empirische aus, sondern nur die Form derselben, Raum und Zeit.“¹⁵ Als Beispiel diene ein vollständiger Raum, welcher drei Abmessungen besitzt. Das es nicht mehr Abmessungen geben kann, wird mit Hilfe des Satzes geklärt, dass sich in einem Punkt nicht mehr als drei Linien so schneiden können, so dass ein rechtwinkliger Winkel entsteht. Dieser Satz wird jedoch nicht mit Begriffen erklärt, sondern beruht auf einer Anschauung a priori. Da man verlangen könnte eine Linie bis ins Unendliche zu ziehen oder Veränderungen vorzunehmen und diese bis ins Unendliche auszuführen, kann man sagen dass dieser Satz apodiktisch sicher ist. Damit wird jedoch eine Vorstellung von Raum und Zeit vorausgesetzt, welche nur mit Hilfe der Anschauung dargestellt werden können, denn aus Begriffen könnte man diese nicht schließen. Damit ist bewiesen, dass die reine Anschauung a priori der Mathematik zu Grunde liegt, „[...] welche ihre synthetische und apodiktisch geltenden Sätze

5.

13 Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 38-39

14 Anschauung bezieht sich unmittelbar auf Etwas, weil nichts dazwischen ist. Erklärung: Ein Begriff bezieht sich auf Etwas. Dadurch wird eine Relation zwischen mindestens zwei Dingen ausgedrückt. Unmittelbar bedeutet, dass eine Etwas bezieht sich auf das andere Etwas unmittelbar. Wenn aber zwischen dem einen Etwas und dem anderen Etwas noch ein weiteres Etwas dazwischen liegt, dann bezieht sich das erste Etwas über das neue Etwas auf das andere Etwas (mittelbar).

15 Kant, Immanuel, in:“Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“, Reclam Verlag, Seite 41

möglich machen [...]“¹⁶ Als Basis dient somit, dass der Raum aller Anschauung schon zu Grunde gelegt wird. Schließlich kann man sich weder etwas ohne räumliche Ausdehnung vorstellen, noch dass ein Raum nicht existieren würde. Deshalb liegt er unserer sinnlichen Wahrnehmung a priori zu Grunde. Das gleiche lässt sich auch für die Zeit sagen, denn ohne sie wäre eine Dauer oder Folge nicht vorstellbar. Unsere Vorstellungen sind in ihr geordnet, weswegen sie eine Form des inneren Sinnes darstellt.

Die reine Mathematik und die reine Geometrie besitzen nur dann eine objektive Realität, wenn sie die Bedingung ein hält, dass sie bloß auf Gegenstände der Sinne eingeht und gleichzeitig aber den Grundsatz beachtet, dass unsere sinnliche Vorstellung keine Vorstellung von den Dingen bzw. Gegenständen an sich zeigt, sondern sie uns nur das zeigen, was sie uns von diesen Dingen darstellen.

Zusammenfassend ist somit zu sagen, dass die Mathematik synthetisch a priori ist, weil sie durch die Eigenbestimmtheit der Anschauung begründet wird. Begriffe werden durch Konstruktionen innerhalb der reinen Anschauung a priori dargestellt und erhalten somit einen 'Realmöglichkeitsfaktor'. Ein Irrtum von mathematischen Definitionen kann ausgeschlossen werden (natürlich nur wenn die Definition logisch korrekt ist), da die Definition den Begriff überhaupt erst erzeugt. Die jeweilige Konstruktion der Begriffe innerhalb der reinen Anschauung führt zu einer Erweiterung des Merkmalsbestandes des Begriffes. Der Begriff muss Widerspruchsfrei sein. Diesen muss man sich dann konstruieren, das heißt eine Anschauung wird dargestellt. Erst wenn man das geschafft hat, erkennt man noch andere Anschauungen (Beispiel: Man ist nicht in der Lage mit Hilfe des Begriffes Dreieck, die exakte Winkelsumme aller Dreiecke zu berechnen, es sei denn man nimmt die Anschauung zu Hilfe). Dieser Begriff ist synthetisch, weil man sich erst durch die Konstruktion dieses Begriffes eine Anschauung machen kann.

Die reine Mathematik ist durch die reine Anschauung möglich, da in ihr die Begriffe a priori dargestellt bzw. konstruiert werden können. Durch die sinnliche Anschauung ist es möglich Gegenstände, die weder vorher noch gegenwärtig existieren, darzustellen, denn die Sinnlichkeit geht den wirklichen Eindrücken des Subjektes voraus, weswegen mich diese beeinflussen können. Objekte erscheinen uns dadurch aber nicht an sich, sondern nur so wie sie uns erscheinen.

Damit werden die Ausgangsfragen, weswegen Mathematik synthetisch a priori ist, welche Ursachen und Gründe damit im Zusammenhang stehen und wie reine Mathematik überhaupt möglich ist, erklärt. Kant's Prolegomena stellt eine kritische Betrachtungsweise des menschlichen Erkenntnisvermögens dar. Solche kritischen Auseinandersetzungen begründen erst das Voranschreiten der menschlichen Natur. Nur wer in der Lage ist Fehler zu sehen und nach ihnen zu

¹⁶ Kant, Immanuel, in: "Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können", Reclam Verlag, Seite 43

suchen, kann sie schließlich auch ausbessern und aus ihnen lernen.

Essay

Wieso ist Mathematik synthetisch a priori ?

Name: Metscher, Janine

Textproseminar: Immanuel Kant „Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als
Wissenschaft wird auftreten können“ Modul: Theoretische Philosophie

Dozent: Prof. Dr. Gerhard Schönrich

Semester: SS 2007

Fachsemester: 02 (Kernfach: Philosophie/ Ergänzung: Soziologie, Humanities)

E-Mail: Sportikka@yahoo.de